mathématique

TERMINALE A

OPTIONS A_3, A_4



R. CLUZEL
P. VISSIO



DELAGRAVE

MATHÉMATIQUE

terminale A

SECOND CYCLE DES LYCÉES
(programmes de 1966)

- **MATHÉMATIQUE 1re A** (par R. Cluzel et P. Vissio)

- **MATHÉMATIQUE 1re B**

  Tome 1. — Mathématique (par R. Cluzel et P. Vissio)

  Tome 2. — Mathématique et Statistique
  (par R. Cluzel, P. Vissio et F. Chartier)

- **MATHÉMATIQUE 1res C et E**

  Tome 1. — Algèbre et Analyse
  (par M. Condamine et P. Vissio)

  Tome 2. — Géométrie et Cinématique (par P. Vissio)

- **MATHÉMATIQUE 1re D**

  Tome 1. — Mathématique (par R. Cluzel et P. Vissio)

  Tome 2. — Mathématique et Statistique
  (par R. Cluzel, P. Vissio et F. Chartier)

- **MATHÉMATIQUE Terminale A** (par R. Cluzel et P. Vissio)

- **MATHÉMATIQUE Terminales C et E**

  Tome 1. — Algèbre (par M. Condamine et P. Vissio)

  Tome 2. — Analyse (par M. Condamine et P. Vissio)

  Tome 3. — Géométrie (par M. Condamine)

- **MATHÉMATIQUE Terminale D**

  Tome 1. — Algèbre et probabilités
  (par R. Cluzel, D. Pougnet et P. Vissio)

  Tome 2. — Analyse et cinématique
  (par R. Cluzel et P. Vissio)

R. CLUZEL
Professeur à l'E.N.N.E.T
de Paris

P. VISSIO
Professeur agrégé
au lycée Lakanal à Sceaux

MATHÉMATIQUE

TERMINALE A

DELAGRAVE

© DELAGRAVE 1968.

AVANT-PROPOS

● *Dans les deux dernières années du second cycle des lycées ont été créées cinq sections aboutissant chacune à l'une des séries du baccalauréat de l'Enseignement du second degré.*

Cet ouvrage est destiné à la classe de Terminale A, section à prédominance littéraire.

● *L'originalité de cette section, du point de vue de l'enseignement des mathématiques, est la grande diversité dont cet enseignement doit faire preuve pour couvrir tous les besoins. En effet, si la préoccupation essentielle des élèves de cette section est normalement tournée vers les disciplines littéraires, et s'il est clair que la grande majorité d'entre eux n'a nul besoin des « techniques mathématiques », il n'en reste pas moins que* **tous** *doivent recevoir une solide formation d'esprit et s'habituer à la rigueur des raisonnements logiques. Quant à ceux pour lesquels les mathématiques seront, ultérieurement, un outil, il n'est pas paradoxal d'affirmer que la dispersion des branches dans lesquelles elles seront utilisées est telle, qu'il faut, actuellement, « plus de mathématiques » en section littéraire qu'en section scientifique.*

Comment, pour concilier ces exigences, avons-nous conçu cet ouvrage?

— Puisqu'il est impensable qu'un livre ne couvre pas toutes les possibilités, nous avons indiqué celles-ci en le partageant en parties nettement séparées, permettant d'effectuer divers choix.

— Nous avons développé au maximum la Première partie, réservée aux ensembles et à la logique afin de satisfaire aussi bien ceux qui ne s'intéressent qu'à la formation de l'esprit que les « « utilisateurs ». En effet, ce qui nous paraît essentiel, c'est la façon d'éclairer les connaissances exposées. Aussi avons-nous mis l'accent sur les notions générales plutôt que sur les cas particuliers et nous n'avons pas craint de reprendre certaines notions exposées en Première A et que l'on pouvait « supposer connues ». Cette partie se termine par un bel exemple d'une construction **axiomatique** *: celle de l'ensemble des nombres complexes.*

— Nous traitons ensuite dans le 2e fascicule destiné aux options A_3 et A_4, compte tenu de leur importance pour des non spécialistes, quelques chapitres essentiels des mathématiques : **dérivation des fonctions numériques, intégrales et aires, fonctions logarithme et exponentielle, calcul des probabilités.**

● *Indiquons que*, **du point de vue pratique :**

❶ *Nous avons groupé dans une même leçon ce qui constitue un* **thème mathématique** *(et qui, dans un cours, fait parfois l'objet de plusieurs leçons) ;*

❷ *Chaque leçon est précédé d'une* « **introduction** », *indiquant le thème traité et motivant son étude, en le rattachant à des connaissances antérieures ou à des applications pratiques ;*

❸ *Chaque définition est* **précédée d'exemples,** *au moins deux, dont l'un est issu « de situations de la vie courante », l'autre résultant de la simple constatation d'un fait mathématique connu. Nous avons aussi indiqué de nombreux* **contre-exemples ;**

❹ *A la fin des leçons, de brèves* **notices historiques** *sont consacrées aux mathématiciens dont les noms sont cités. Ces notices, expurgées de tout détail anecdotique, signalent les idées scientifiques essentielles, à la portée d'un élève de Terminale A, du mathématicien cité. Bien que très incomplètes, leur caractère culturel ne nous semble cependant pas négligeable ;*

❺ *De nombreux exercices sont suivis d'***indications.** *Parfois simple réponse, souvent conseil sur la manière d'aborder la recherche d'une solution. Notre but a été d'aider le lecteur à « apprendre à chercher », à éviter une trop longue hésitation, à vérifier aisément un résultat ;*

❻ *Un index alphabétique permet de retrouver rapidement les définitions des mots importants, les résultats essentiels, les noms des mathématiciens cités ;*



❼ *Enfin un signe particulier, placé dans la marge, indique soit un théorème important, soit une définition essentielle, soit une démonstration délicate qui mérite attention.*

● *Respectueux du principe selon lequel chaque collègue est libre d'organiser son Cours selon ses goûts et le niveau de sa classe, nous n'avancerons aucun conseil relatif à l'utilisation de cet ouvrage. Rappelons cependant que nous l'avons conçu de façon telle qu'il soit possible d'effectuer aisément de nombreux choix, autrement dit de définir plusieurs options. Nous recevrons toujours avec gratitude les observations qui nous permettraient d'améliorer cet ouvrage.*

Les auteurs.

LE RAISONNEMENT LOGIQUE



● *De ce chapitre il ne faut attendre :*

— ni un exposé, d'ordre philosophique, sur les lois de la pensée ;
— ni une étude, même élémentaire, de la logique formelle qui, à l'aide d'un nombre réduit de symboles et de lois, permet d'exprimer tous les modes de raisonnement.

● *Plus simplement, il s'agit de donner une description élémentaire des règles et symboles couramment utilisés dans le raisonnement logique.*

Ces considérations sur les théories mathématiques ne sont évidemment pas des théories mathématiques. Elles nous conduiront cependant **à expliciter les modes usuels de démonstration mathématique,** *modes dont nous avons déjà, implicitement, l'usage.*

1. NOTIONS PREMIÈRES - AXIOMES

La science mathématique, comme toute autre science, ne peut construire à partir de rien. Il faut, au départ de toute construction, disposer de divers éléments : « *matières premières* » et « *modes d'emploi* », ici **notions premières** et **axiomes.**



● **Les notions premières** (ou **termes primitifs)** sont posées *a priori*. Ces notions ne sauraient être rattachées à aucune notion antérieure, puisqu'elles sont les premières ; certaines sont élaborées, par abstraction, à partir de notions intuitives. Les termes primitifs sont représentés par des lettres ou des symboles.

Ainsi les termes primitifs du chapitre suivant **(Notions sur les ensembles)** sont ceux d'**ensemble,** d'**élément** et de **relation d'appartenance.**

La notion d'ensemble est issue de la notion usuelle de collection.

Les éléments sont représentés par de petites lettres *a*, b, ... ; les ensembles par des majuscules E, F, ... ; la relation d'appartenance par le symbole $\in$.

Les notions primitives sont aussi désignées sous le vocable d'**objets** de la théorie.

De même, nous supposerons que la notion d'**égalité** (notée =) est une notion primitive.

• Terme dérivé. Assertion



Une notion **dérivée** ou terme **dérivé** est un assemblage de termes primitifs.
Une **proposition** ou **assertion** est une succession de termes primitifs ou dérivés.
Cependant, tous les assemblages et toutes les successions de termes primitifs ou dérivés ne sont pas *permis*. La théorie doit donc comporter des critères permettant de décider si tel assemblage est permis ou non.

Par exemple, dans la théorie des ensembles, si a est un élément et A un ensemble, l'assemblage, ou assertion, $a \in A$ est *permis*; les assemblages $a \in a$, $A \in a$, $ab = \in aA$, ne sont pas permis.
Les notions d'**inclusion**, de **complémentaire**, sont des notions **dérivées.**

• Les **axiomes** sont des propositions posées *a priori* comme *vraies*, ou des *règles* décrivant les modalités d'emploi des termes primitifs permettant de former des termes dérivés ou des propositions.

Ainsi, par exemple, l'**égalité** satisfait aux **axiomes** suivants :

— **quel que soit l'objet a :** $a = a$;

— **quels que soient les objets a et b** $\begin{cases} \text{si } a = b \text{ alors } b = a; \\ \text{si } a = b \text{ et si } b = c, \text{ alors } a = c. \end{cases}$

2. THÉORIES - RAISONNEMENT LOGIQUE



• Une **théorie mathématique** se compose, en plus des termes primitifs, de la succession des propositions **vraies** qui sont :
— les *axiomes* de la théorie;
— les *théorèmes*, propositions établies par *enchaînement* des axiomes et des théorèmes déjà établis. Les théorèmes sont donc des *propositions dérivées.*

• Mais, de même qu'au § 1 pour les termes, tous les enchaînements *de propositions ne sont pas permis.*
Il existe donc des *termes primitifs de logique* et des *axiomes (ou régles) de logique* décrivant les modalités d'emploi des termes primitifs et des axiomes. Nous nous placerons ici dans la situation simple suivante :

• Négation d'une proposition

C'est un *terme primitif.*

On énonce :
si $\mathfrak{R}$ est une proposition, alors (non $\mathfrak{R}$)est une proposition appelée **négation** de $\mathfrak{R}$.

On note soit **($\neg$ $\mathfrak{R}$),** soit **non $\mathfrak{R}$**

• Axiome (ou principe) du tiers exclus

R_1 *Quelle que soit la proposition $\mathfrak{R}$:*
$\mathfrak{R}$ et (non $\mathfrak{R}$) ne peuvent être vraies simultanément ;
et : $\mathfrak{R}$ est vraie ou (non $\mathfrak{R}$) est vraie.

REMARQUES

1. Une assertion $\mathfrak{R}$ est dite **fausse,** si (non $\mathfrak{R}$) est vraie.
2. Dans cette théorie simplifiée, une proposition $\mathfrak{R}$ ne peut être **indécidable,** c'est-à-dire ni vraie, ni fausse.
3. Une proposition $\mathfrak{R}$ à la fois vraie et fausse est dite **contradictoire.** D'après **R_1,** si dans une théorie une proposition est contradictoire, la théorie est à rejeter.
4. **Tables de vérité**

Si l'on note V et F, les assertions « $\mathfrak{R}$ est vraie » et « $\mathfrak{R}$ est fausse », le principe **R_1** conduit à la disposition ci-contre, appelée *Table de vérité* de $\mathfrak{R}$ et de (non $\mathfrak{R}$) :

$\mathfrak{R}$	(non $\mathfrak{R}$)
V	F
F	V

• Disjonction logique. C'est un *terme primitif.*

Soit $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{S}$ deux assertions, et leurs Tables de vérité (cf. ci-contre).
Nous admettons qu'il existe une assertion, appelée ($\mathfrak{R}$ ou $\mathfrak{S}$), définie par la Table I.

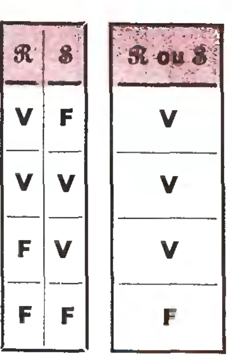
Cette assertion est la **disjonction** de $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{S}$. On note :

soit **$\mathfrak{R} \vee \mathfrak{S}$,**

soit $\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{R}\\ \mathfrak{S}\end{array}\right.$

Cette disjonction n'est pas exclusive, c'est-à-dire qu'en langage usuel, elle signifie *l'une au moins des deux propositions est vraie.*

Table I



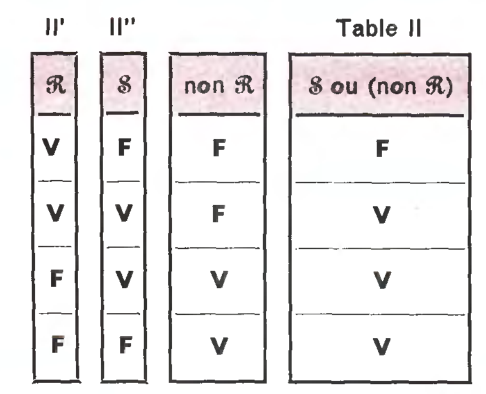
$\mathfrak{R}$	$\mathfrak{S}$	$\mathfrak{R}$ ou $\mathfrak{S}$
V	F	V
V	V	V
F	V	V
F	F	F

3. OPÉRATIONS LOGIQUES ÉLÉMENTAIRES

A partir des termes primitifs **non** et **ou**, on définit à l'aide d'**opérations logiques**, dites élémentaires, des termes dérivés simples. Dans le chapitre suivant, nous illustrerons ces opérations à l'aide des schémas ensemblistes.

- **Implication logique** (ℜ implique 𝔖).

Considérons les Tables de vérité ci-dessous :



II' ℜ	II'' 𝔖	non ℜ	Table II 𝔖 ou (non ℜ)
V	F	F	F
V	V	F	V
F	V	V	V
F	F	V	V

La Table II *définit* (à l'aide de **non** et **ou**) une nouvelle proposition :

𝔖 ou (non ℜ) appelée **implication**. On note ℜ ⟹ 𝔖

Il faut bien remarquer que l'**implication** est une **nouvelle proposition** et qu'en tant que telle, elle peut être vraie ou fausse.
En fait, elle n'est fausse que si ℜ *est vraie et* 𝔖 *fausse* (1re ligne de la Table II).

- **Conjonction**

Considérons les Tables de vérité ci-dessous :

ℜ	𝔖	non ℜ	non 𝔖	(non ℜ) ou (non 𝔖)	Table III non [(non ℜ)ou (non 𝔖)]
F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	F
V	F	F	V	V	F
V	V	F	F	F	V

La Table III définit une proposition vraie dans le seul cas où $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{S}$ le sont. Cette proposition est appelée *conjonction des propositions $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{S}$.*

Elle est notée **($\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{S}$)** ou **($\mathfrak{R} \wedge \mathfrak{S}$)** ou $\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{R} \\ \mathfrak{S} \end{array} \right.$

En langage courant cela signifie : *les deux propositions $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{S}$* considérées simultanément.

Et $\mathfrak{R} \wedge \mathfrak{S}$ est définie à partir des termes primitifs **non** et **ou** par :

$$\mathfrak{R} \wedge \mathfrak{S} = \text{non } [(\text{non } \mathfrak{R}) \text{ ou } (\text{non } \mathfrak{S})]$$

Remarquons qu'un terme dérivé, introduit par une **définition** est une simple **abréviation.** Les abréviations permettent d'éviter une complexité trop grande des propositions.

● **L'équivalence logique** ($\mathfrak{R}$ équivaut à $\mathfrak{S}$), est définie par :

$\mathfrak{R} \Longrightarrow \mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S} \Longrightarrow \mathfrak{R}$. On la note : $\mathfrak{R} \Longleftrightarrow \mathfrak{S}$

Le lecteur est invité à écrire la Table de vérité de l'**équivalence logique.**

● La négation de $\mathfrak{R} \Longrightarrow \mathfrak{S}$ se note $\mathfrak{R} \not\Longrightarrow \mathfrak{S}$.
L'implication $\mathfrak{S} \Longrightarrow \mathfrak{R}$ est dite **réciproque** de $\mathfrak{R} \Longrightarrow \mathfrak{S}$
L'implication (non $\mathfrak{S}$) $\Longrightarrow$ (non $\mathfrak{R}$) est dite **contraposée** de $\mathfrak{R} \Longrightarrow \mathfrak{S}$.

4. THÉORÈMES DE LOGIQUE

Ce qui précède permet d'établir des **théorèmes** de logique. Nous citerons les résultats les plus usuels que nous appellerons aussi **règles du raisonnement logique.**

R_2 Règle d'implication.

Si $\mathfrak{R}$ est une proposition vraie et si ($\mathfrak{R} \Longrightarrow \mathfrak{S}$) est vraie, alors $\mathfrak{S}$ est une proposition vraie.

La démonstration résulte de la comparaison des Tables II', II et II'' (§ 3), lignes 1 et 2.

Remarques

❶ Dans le langage usuel, cette règle s'exprime souvent, non sans danger (car il est passé sous silence que la proposition $\mathfrak{R} \Longrightarrow \mathfrak{S}$ est vraie) sous l'une des formes :

- pour que $\mathfrak{R}$ soit vraie, il **faut** que $\mathfrak{S}$ soit vraie ;
- ou pour que $\mathfrak{S}$ soit vraie, il **suffit** que $\mathfrak{R}$ soit vraie.

② De façon analogue, ($\mathfrak{R} \Longleftrightarrow \mathfrak{S}$) vraie s'énonce aussi :

- pour que $\mathfrak{S}$ soit vraie, **il faut et il suffit** que $\mathfrak{R}$ le soit ;
- ou $\mathfrak{S}$ est vraie **si, et seulement si,** $\mathfrak{R}$ est vraie.

R_3 *Si les implications* ($\mathfrak{R} \Longrightarrow \mathfrak{S}$) et ($\mathfrak{S} \Longrightarrow \mathfrak{T}$) *sont simultanément vraies, alors* ($\mathfrak{R} \Longrightarrow \mathfrak{T}$) est *vraie.*

Ce qui se traduit en disant que l'**implication logique est transitive.** Il en résulte que l'équivalence logique est aussi transitive.

R_4 *Si les trois propositions* ($\mathfrak{R}$ *ou* $\mathfrak{S}$), ($\mathfrak{R} \Longrightarrow \mathfrak{T}$), ($\mathfrak{S} \Longrightarrow \mathfrak{T}$) *sont simultanément vraies, alors* $\mathfrak{T}$ *est vraie.*

R_5 *L'équivalence* ($\mathfrak{R} \Longleftrightarrow$ *non (non* $\mathfrak{R}$)) *est vraie.*

R_6 *La proposition* ($\mathfrak{R} \Longrightarrow \mathfrak{S}$) $\Longleftrightarrow$ (*non* $\mathfrak{S}$) $\Longrightarrow$ (*non* $\mathfrak{R}$) *est vraie*

c'est-à-dire que : *toute implication est équivalente à sa contraposée.*

5. MÉTHODES DE DÉMONSTRATION

Une *démonstration mathématique* consiste, à partir d'une proposition $\mathfrak{R}$ vraie à établir, à l'aide des règles précédentes, une nouvelle proposition $\mathfrak{S}$ vraie. Par définition $\mathfrak{R}$ est **l'hypothèse** et $\mathfrak{S}$ la **conclusion.**

Indiquons quelques méthodes usuelles de démonstration.



- Démonstration **par implication.**

Elle consiste en l'application de la règle d'implication **R_2.**

Si la proposition $\mathfrak{R}$ est vraie et si l'implication ($\mathfrak{R} \Longrightarrow \mathfrak{S}$) est vraie, alors la proposition $\mathfrak{S}$ est vraie.

Une démonstration est alors une suite de propositions dont chacune est établie en utilisant seulement des propositions établies antérieurement.

Exemple.

Soit, à démontrer, dans un problème, que trois droites D_1, D_2, D_3 sont concourantes.

Nous connaissons l'implication vraie :

$$(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) \text{ médianes d'un triangle} \Longrightarrow (\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) \text{ concourent.}$$

$$\mathfrak{R} \Longrightarrow \mathfrak{S}$$

Par suite :

si (D_1, D_2, D_3) sont les médianes d'un triangle (ce qui reste à établir), alors $\mathfrak{R}$ étant vraie et ($\mathfrak{R} \Longrightarrow \mathfrak{S}$) également, donc $\mathfrak{S}$ est vraie ; c'est dire que les droites D_1, D_2, D_3 envisagées sont concourantes.



• Démonstration **par disjonction des cas.**

Elle repose sur le fait que si les deux implications :

$(\mathfrak{R} \Longrightarrow \mathcal{S})$ et $[(\text{non } \mathfrak{R}) \Longrightarrow \mathcal{S}]$

sont vraies, alors $\mathcal{S}$ est vraie.

En effet : [$\mathfrak{R}$ ou (non $\mathfrak{R}$] est vraie, d'après **R_1** ; et de **R_4** résulte la conclusion.

Dans la leçon suivante, nous traitons entièrement un exemple de ce type de démonstration (exercice 2-10 ; indications).



• Démonstration **par l'absurde.**

Le principe est le suivant : pour établir que, dans une théorie T, une relation $\mathfrak{R}$ est vraie, on construit la théorie T′ obtenue en adjoignant à T l'axiome (*non* $\mathfrak{R}$).

Il suffit alors de trouver dans T′ une proposition contradictoire.

En effet, d'après **R_1,** l'assertion (*non* $\mathfrak{R}$) y est aussi contradictoire. Alors la théorie T′ est à rejeter (cf. § 2, remarques) et, d'après **R_1,** la proposition $\mathfrak{R}$ est vraie dans la théorie T.

Dans cette leçon (exercice 1-11 ; indications), nous traitons entièrement un exemple de ce type de démonstration.



• Démonstration **par contre-exemple.**

Pour démontrer *la négation d'une implication*, soit : $\mathfrak{R}$ n'implique pas $\mathcal{S}$, $(\mathfrak{R} \not\Longrightarrow \mathcal{S})$, on fournit un **contre-exemple,** c'est-à-dire *un exemple dans lequel* $\mathfrak{R}$ et (non $\mathcal{S}$) sont *simultanément vraies.*

Soit $\mathfrak{R}$: « *n* est un entier divisible séparément par 6 et 4 » ;
Soit $\mathcal{S}$: « *n* est divisible par 24 ».
A-t-on $\mathfrak{R} \Longrightarrow \mathcal{S}$?
Non car, *par exemple*, le nombre 12 rend $\mathfrak{R}$ et (non $\mathcal{S}$) simultanément vraies.
Donc $\mathfrak{R} \not\Longrightarrow \mathcal{S}$.



• Raisonnement **par récurrence.**

Ce raisonnement s'emploie pour démontrer que, **quel que soit l'entier naturel** *n*, une assertion, dans laquelle *n* intervient, est vraie.

Pour cela on utilise l'**axiome de récurrence** (dû à Péano) qui s'énonce :

— *si l'assertion est vraie pour l'entier zéro ;*

— *si de l'assertion vraie pour l'entier* p, *on déduit que l'assertion est vraie pour le suivant de* p,

— **alors** *l'assertion est vraie quel que soit l'entier naturel n.*

Intuitivement, on peut concevoir cet axiome de la manière suivante. Si l'on a *démontré* :

— d'une part, que l'assertion est vraie pour l'entier zéro (1)

— d'autre part, de l'assertion vraie pour l'entier *p* on déduit qu'elle est vraie pour le suivant de *p* (2)

alors, l'assertion étant vraie pour zéro (1) est vraie pour 1 (résultat (2)) ;

l'assertion étant « maintenant » vraie pour 2 est vraie pour 3 (application du résultat (2)) ; *etc*... L'axiome de récurrence *codifie* l'usage du « *etc.* ».

REMARQUE

Si l'on a démontré que :

une assertion est vraie pour l'entier naturel a ; si l'assertion est vraie pour l'entier $p > a$, alors elle est vraie pour le suivant de p, *l'axiome de récurrence* permet d'en déduire que l'**assertion est vraie pour tout entier** $n \geqslant a$.

EXEMPLE

Démontrer que toute puissance de 10, d'exposant entier positif, est un multiple de 9, plus 1.

❶ *L'assertion est vraie pour* $n = 1$. En effet $10^1 = 10 = 9 + 1$.

❷ *Supposons l'assertion vraie pour l'entier* p, soit $10^p = 9k + 1$.
(Cette supposition s'appelle *l'hypothèse de récurrence*).

❸ Alors $10^{p+1} = 10^p \times 10 = (9k + 1) \times 10$

D'où $10^{p+1} = 90k + 10 = 90k + 9 + 1$

$10^{p+1} = 9(10k + 1) + 1$. Or $10k + 1$ est un entier ; puisque k en est un. Posons $10k + 1 = k'$. Alors $10^{p+1} = 9k' + 1$. Ce qui prouve que l'assertion est vraie pour $(p + 1)$.

❹ L'axiome de récurrence assure alors que l'assertion est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

6. APPLICATIONS

Démontrons, à titre d'exercice, quelques propriétés très souvent utilisées en pratique.

- **La proposition**

$(\mathfrak{R} \Longleftrightarrow \mathfrak{S}) \quad \Longleftrightarrow \quad (\text{non } \mathfrak{R}) \Longleftrightarrow (\text{non } \mathfrak{S})$ **est vraie**

En effet :
$(\mathfrak{R} \Longleftrightarrow \mathfrak{S})$ équivaut à : $[(\mathfrak{R} \Longrightarrow \mathfrak{S})$ et $(\mathfrak{S} \Longrightarrow \mathfrak{R})]$ par définition puis, d'après R_6 à $\{[(\text{non } \mathfrak{S}) \Longrightarrow (\text{non } \mathfrak{R})]$ et $[(\text{non } \mathfrak{R} \Longrightarrow (\text{non } \mathfrak{S})]\}$ et donc à $[(\text{non } \mathfrak{R} \Longleftrightarrow (\text{non } \mathfrak{S})]$ par définition. La conclusion résulte de R_3.

- **Négation de ($\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{S}$).**

La proposition

$\text{non } (\mathfrak{R} \text{ et } \mathfrak{S}) \quad \Longleftrightarrow \quad (\text{non } \mathfrak{R}) \text{ ou } (\text{non } \mathfrak{S})$ **est vraie.**

En effet :

($\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$) équivaut à *non* [(*non* $\mathcal{R}$) ou (*non* $\mathcal{S}$)], par définition. Et, d'après ce qui précède et R_5 :

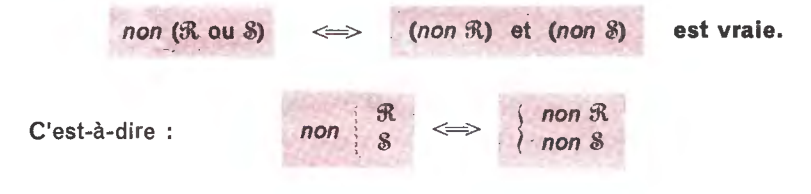
non ($\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$) équivaut à : [(*non* $\mathcal{R}$) ou (*non* $\mathcal{S}$)]

Donc : *non* $\left\{\begin{array}{l}\mathcal{R}\\ \mathcal{S}\end{array}\right.$ $\Longleftrightarrow$ $\left\{\begin{array}{l}\textit{non } \mathcal{R}\\ \textit{non } \mathcal{S}\end{array}\right.$

● **Négation de ($\mathcal{R}$ ou $\mathcal{S}$).**

Le lecteur établira, soit en utilisant les théorèmes du § 4, soit à l'aide des Tables de vérité, que :

La proposition



non ($\mathcal{R}$ ou $\mathcal{S}$) $\Longleftrightarrow$ (*non* $\mathcal{R}$) et (*non* $\mathcal{S}$) **est vraie.**

C'est-à-dire : *non* $\left\{\begin{array}{l}\mathcal{R}\\ \mathcal{S}\end{array}\right.$ $\Longleftrightarrow$ $\left\{\begin{array}{l}\textit{non } \mathcal{R}\\ \textit{non } \mathcal{S}\end{array}\right.$



EXERCICES

Les lettres $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$,... désignent des propositions (ou assertions).

1-1 Construire les Tables de vérité de *non* ($\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$) et de [(*non* $\mathcal{R}$) ou (*non* $\mathcal{S}$)]. Conclusion.

1-2 Établir, en utilisant les théorèmes de logique (§ 4), puis à l'aide des Tables de vérité que *non* ($\mathcal{R}$ ou $\mathcal{S}$) $\Longleftrightarrow$ [(*non* $\mathcal{R}$) et (*non* $\mathcal{S}$)].

1-3 Démontrer, à l'aide des Tables de vérité, les théorèmes R_3 et R_4 du paragraphe 4.

1-4 Former les négations des propositions :

[($\mathcal{R}$ ou $\mathcal{S}$) et $\mathcal{T}$] [($\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$) ou $\mathcal{T}$].

1-5 Traduire, à l'aide de : *ou*, *non*, les négations des propositions :

($\mathcal{R} \Longrightarrow \mathcal{S}$) et $\mathcal{T}$ ($\mathcal{R} \Longrightarrow \mathcal{S}$) ou $\mathcal{T}$.

Même question, en remplaçant respectivement *ou*, *non*, *et*, par les symboles

$\vee$ $\neg$ $\wedge$.

1-6 Sur les 1 000 élèves d'un lycée, 720 suivent les cours d'anglais, 500 ceux d'allemand, 250 ceux d'espagnol. De plus, 340 apprennent au moins l'anglais et l'alle-

mand, 140 apprennent au moins l'anglais et l'espagnol, 130 apprennent au moins l'allemand et l'espagnol. Enfin 40 d'entre eux apprennent les trois langues. Combien n'apprennent aucune des trois langues indiquées ? Dresser une répartition de l'ensemble des élèves d'après la (ou les) langue étudiée.

1-7 A chacun des trois éléments A, B, C, doit être associée une et une seule des trois propriétés *c*, *d*, *p*.

Déterminer la propriété associée à chaque élément sachant que :

$$\begin{cases} \text{(I)} & A(c) \Longrightarrow B(d) \\ \text{(II)} & A(d) \Longrightarrow B(p) \\ \text{(III)} & B(\textit{non } c) \Longrightarrow C(d) \\ \text{(IV)} & C(p) \Longrightarrow A(d) \end{cases}$$

[On pourrait déterminer la profession : chirurgien, dentiste ou pharmacien, de chacun des trois frères : André, Bernard, Claude, suivant une correspondance évidente : « Si André est chirurgien, alors Bernard est dentiste »...].

1-8 Trois jeunes gens, Marie, Paule, René, ont prononcé les phrases suivantes :

Marie : « J'ai 22 ans ; j'ai deux ans de moins que Paule ; j'ai un an de plus que René ».

Paule : « Je ne suis pas la plus jeune ; René et moi avons trois ans d'écart ; René a 25 ans ».

René : « Je suis plus jeune que Marie ; Marie a 23 ans ; Paule a trois ans de plus que Marie ».

Peut-on déterminer l'âge de chacun, sachant qu'une et une seule des assertions de chaque jeune gens est fausse ?

1-9 Les cannibales d'une tribu se préparant à manger un missionnaire, lui proposent de décider lui-même de son sort, en faisant une courte déclaration. Si celle-ci est vraie, il sera rôti ; si elle est fausse, il sera bouilli. Par quelles déclaration le missionnaire peut-il leur imposer une troisième solution ? (Tiers exclu, a priori, dans la « logique cannibale »). (D'après *Cervantès*).

1-10 Une cellule de prison est munie de deux portes : l'une conduit à la liberté, l'autre à la mort ; devant chaque porte est un gardien qui connaît le rôle des deux portes ; chacun des gardiens peut répondre uniquement par oui ou par non ; l'un des deux donne toujours une réponse vraie, l'autre toujours une réponse fausse. Le prisonnier ignore quel gardien dit vrai et lequel ment ; il peut poser une seule question, à un seul des gardiens. Par quelle question peut-il déterminer la porte qui conduit à la liberté ?

1-11 Pour choisir un ministre parmi trois candidats A, B, C, un roi oriental les a soumis à une épreuve : sur la tête de chacun d'eux on place une boule qu'il ne voit pas, mais il voit la boule placée sur la tête des deux autres ; les candidats savent que les boules sont choisies parmi cinq boules, trois noires et deux blanches ; le premier qui dira la couleur de la boule située sur sa tête sera ministre ; s'il se

trompe, il aura la tête tranchée. L'un d'eux, A, qui voit une boule noire sur la tête de chacun des deux autres, affirme avec sûreté, voyant que les autres ne disent rien : « j'ai une boule noire ». Expliciter son raisonnement. (Conte oriental).

1-12 Démontrer par récurrence que, quel que soit l'entier $n \geqslant 1$:

(1) $$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(2) $$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

(3) $$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(4) $$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

(5) $$1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n.(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

INDICATIONS

● **Péano** (Giuseppe) né à Cunéo en 1858, mort à Turin en 1932.
Logicien et mathématicien connu surtout pour son axiomatique des entiers naturels. Fut le promoteur de la méthode axiomatique qu'il appliqua dans de nombreux domaines mathématiques (théorie des ensembles...) et extra-mathématiques (recherche d'une langue internationale aussi rationnelle que possible, ce qui le conduisit au « latin sans déclinaison »).

1-1

$\mathcal{R}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$	non ($\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$)	non $\mathcal{R}$	non $\mathcal{S}$	(non $\mathcal{R}$) ou (non $\mathcal{S}$)
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V
V	V	V	F	F	F	F

1-3 Pour R_4, ne pas oublier que $\mathcal{R} \Longrightarrow \mathcal{S}$ est fausse si, et seulement si, $\mathcal{R}$ est vraie et $\mathcal{S}$ fausse (§ 3). On obtient les Tables de vérité :

$\mathfrak{R}$	$\mathfrak{S}$	$\mathfrak{T}$	$\mathfrak{R}$ ou $\mathfrak{S}$	$\mathfrak{R} \Rightarrow \mathfrak{T}$	$\mathfrak{S} \Rightarrow \mathfrak{T}$	
V	V	V	V	V	V	*
V	V	F	V	F	F	
V	F	V	V	V	V	*
V	F	F	V	F	V	
F	V	V	V	V	V	*
F	V	F	V	V	F	
F	F	V	F	V	V	
F	F	F	F	V	V	

Le théorème résulte de la traduction des lignes marquées *.

1-9 Si le missionnaire déclare qu'il sera bouilli...

1-10 Si le prisonnier demande à l'un des gardiens la réponse de l'autre...

1-11 Bel exemple de raisonnements par l'absurde superposés!

A se dit :« Si j'ai une boule blanche, B se dira :
« Si j'ai une boule blanche, C voit deux boules blanches et donc C peut affirmer : « j'ai une boule noire »; C ne disant rien, cette hypothèse est à rejeter; donc j'ai une boule noire ».

B ne disant rien...

C'est-à-dire : A construit une **Théorie** T′ formée de l'énoncé T et de l'axiome : j'ai une boule blanche; il suppose alors que B construit la **théorie** T″ formée de T′ et du nouvel axiome : moi, B, j'ai une boule blanche...

1-12 (2) — L'assertion est vraie si $n = 1$. En effet $2n - 1 = 1$ et par suite la somme demandée se réduit au seul terme 1. Or $1 = 1^2$.

— Supposons que l'assertion soit vraie pour l'entier naturel p (hypothèse de récurrence).

Alors $$1 + 3 + 5 + \ldots + (2p - 1) = p^2$$

— Calculons $$y = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2p - 1) + (2p + 1)$$

D'après l'hypothèse de récurrence $y = p^2 + (2p + 1)$
$$= p^2 + 2\,p + 1 = (p + 1)^2$$

La propriété est donc vraie pour le suivant $(p + 1)$ de p.

— L'axiome de récurrence, nous permet d'affirmer que :
quel que soit $n \geqslant 1$, alors $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

NOTIONS SUR LES ENSEMBLES

2

● *Dans cette leçon, nous introduisons des notions très simples de la théorie des ensembles. Pourquoi? La théorie des ensembles permet d'une part,* **de clarifier et de simplifier le langage mathématique,** *d'autre part* **de dégager les modes de raisonnement utilisés.**

En effet, dans les « anciennes » mathématiques, on s'attachait plus à la nature des objets étudiés (« nombres » en arithmétique et algèbre, « figures » en géométrie) qu'à la **méthode** *utilisée dans les démonstrations. Or, celle-ci est souvent indépendante de la nature des objets étudiés.*

La théorie des ensembles permet donc une réelle économie de pensée, d'où résulte un approfondissement possible de celle-ci et une plus grande efficacité.

● *Quant au langage mathématique, chacun s'accorde à reconnaître qu'il doit être soumis à deux conditions : être clair, être précis. Or, il n'en est pas toujours ainsi. Par exemple, qu'entend-on par* **triangle?** *Pour certains, c'est « l'ensemble » des trois points appelés sommets, pour d'autres, « l'ensemble » des trois segments appelés côtés (d'ailleurs ces « côtés » sont souvent assimilés aux droites qui les portent) ; pour d'autres enfin, il s'agit du domaine plan limité par les trois côtés.*

● *Montrons, sur deux exemples, que le* **langage courant** *ne permet pas toujours d'énoncer* **simplement** *et* **clairement** *un résultat mathématique :*

a) *Comment comprendre la phrase suivante :* **« Écrire les nombres divisibles par 3 ou 5 ».** *En effet, les nombres 15, 30, ... doivent-ils être écrits? Cela dépend du sens donné au mot « ou ».*

b) **Comment exprimer qu'un nombre est solution de l'inéquation $(x - 1)(x - 2) > 0$?**

Il est clair qu'un nombre x inférieur à 1 est solution, de même qu'un nombre x supérieur à 2. Nous ne pouvons pourtant pas écrire que **« les nombres $x < 1$ et $x > 2$ sont solutions »** *car le mot* **« et »** *prêtera à confusion (il n'y a pas de nombres satisfaisant simultanément aux deux conditions). De même, compte tenu de l'ambiguïté du mot* **« ou »** *(voir ci-dessus), il est dangereux d'écrire que* **« les nombres $x < 1$ ou $x > 2$ sont solutions ».** *Des périphrases seraient donc nécessaires. La théorie des ensembles permettra de s'exprimer en un langage clair et précis.*

● *Bien entendu, nous mettrons en évidence le lien étroit existant entre la « théorie des ensembles » et les notions de logique introduites dans le chapitre précédent.*

1. LES ENSEMBLES



La notion **d'ensemble** (*set* en anglais, *menge* en allemand, *mnojestvo* en russe) est une notion primitive, donc non susceptible de définition. Elle est issue du terme usuel de collection, de rassemblement d'objets. La théorie des ensembles est en fait une théorie de la *relation d'appartenance*. Les termes primitifs sont ceux **d'élément, d'ensemble** et de **relation d'appartenance.**

Nous dirons par exemple :

l'ensemble (E_1) des **élèves** de votre classe

l'ensemble (E_2) des **prénoms** des élèves de votre classe

l'ensemble (E_3) des **points** d'un segment donné

l'ensemble (E_4) des **droites** d'un plan donné

l'ensemble (E_5) des **lettres** de l'alphabet français

l'ensemble (E_6) des **nombres pairs**

l'ensemble (E_7) des **pages** de ce livre

l'ensemble (E_8) des **chiffres** dans la numération à base 10.

● Notation et représentation

Un ensemble E est composé *d'objets*, dits **éléments** de E :

a est élément de E

se note **$a \in E$** et se lit « a *appartient à* E »

On dit aussi que E **comprend** *a*.

La négation de $a \in E$ se note : $a \notin E$ et se lit « a *n'appartient pas à* E ».

● Des deux propositions : $a \in E$, et $a \notin E$, l'une est vraie, l'autre est fausse.

● Les éléments d'un ensemble sont parfois représentés par des croix (fig. 1) ou des points (fig. 1′) situés dans un domaine plan intérieur à une courbe fermée simple ; s'ils sont trop nombreux, on représente parfois l'ensemble par tout le domaine intérieur (fig. 2).

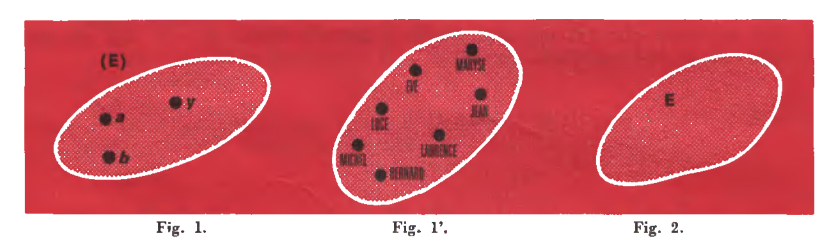


Fig. 1. Fig. 1′. Fig. 2.

● Détermination d'un ensemble

Le plus souvent, un ensemble pourra être défini de l'une ou l'autre des deux façons suivantes.

● *Il est possible de dresser la nomenclature* (l'inventaire) *de ses éléments.*

Par exemple : la liste des **élèves** pour l'ensemble (E_1) ;
la liste des **prénoms** pour (E_2) ;
l'**alphabet** pour (E_3).

On dit alors que l'ensemble est défini **en extension.** Dans ce cas, on écrit entre deux accolades la liste des éléments de l'ensemble.

Par exemple : $E_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

L'ensemble constitué du seul élément *a* est noté $\{a\}$, et se nomme parfois *singleton*. On écrit : $a \in \{a\}$.
L'ensemble constitué des deux éléments *a* et *b*, noté $\{a, b\}$ est appelé une *paire*.

● L'ensemble est déterminé par un *critière d'appartenance.*

Un *élément x* appartient à l'ensemble E, si et seulement si, *x* vérifie une propriété (α). On dit aussi que l'ensemble est défini en **compréhension** et *x* est appelé **élément générique** de l'ensemble.
On note $E = \{x ; x\ (\alpha)\}$ ou $E = \{x |\ x,\ (\alpha)\}$, ce qui se lit « *l'ensemble* E *a pour éléments les x pour lesquels la propriété* (α) *est vérifiée* ».

2. SOUS-ENSEMBLES. INCLUSION. IMPLICATION LOGIQUE

EXEMPLES

① Soit (F) l'ensemble des fleurs et (T) l'ensemble des tulipes.

Pulsque **toute** tulipe est une fleur, tout élément de l'ensemble (T) est un élément de l'ensemble (F) ; on dit alors que **l'ensemble (T) est inclus dans l'ensemble (F).** On écrit T ⊂ F.

On dit aussi que (T) est une **partie** (ou un **sous-ensemble**) de (F).

② Soit A l'ensemble des nombres entiers dont l'écriture dans la base 10 se termine à droite par le chiffre 0 et B l'ensemble des entiers divisibles par 5.

Pulsque **tout** entier terminé par 0 est divisible par 5, **tout** élément de l'ensemble A est un élément de l'ensemble B ; on dit alors que **A est inclus dans B.** On écrit : A ⊂ B.

On dit aussi que A est un **sous-ensemble** de B.

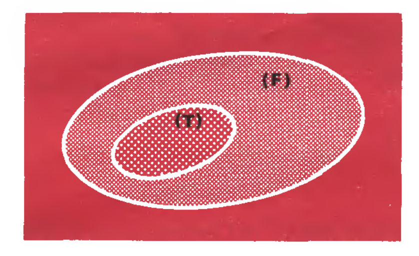


Fig. 3.

Fig. 4.



• DÉFINITION

Un ensemble A est un sous-ensemble d'un ensemble E (ou une *partie* de E), **si tout élément de A est élément de E.**
On dit aussi que : A est **inclus** (*ou contenu*) dans E.

On note $A \subset E$ ou $E \supset A$

Ainsi : $A \subset E \iff x \in A \Rightarrow x \in E$

La négation de A ⊂ E se note A ⊄ E et se lit « A *n'est pas inclus* (ou contenu) *dans* E ».
On emploie le terme d'*inclusion stricte* pour indiquer qu'un ensemble A est une partie d'un ensemble E, distincte de E lui-même.

2

• INCLUSION ENSEMBLISTE ET IMPLICATION LOGIQUE

Soit deux ensembles A et B définis en **compréhension** respectivement par les propriétés (α) et (β) : $A = \{x ; x, (\alpha)\}$, et $B = \{y ; y, (\beta)\}$.

— L'inclusion $A \subset B$ implique que : si x a la propriété (α), c'est-à-dire si x est élément de A, alors x est élément de B, et x a la propriété (β).
Par suite : $A \subset B$ entraîne l'implication $(\alpha) \Longrightarrow (\beta)$.

— L'implication $(\alpha) \Longrightarrow (\beta)$ entraîne que : si x est élément de A, c'est-à-dire si x a la propriété (α), alors x a la propriété (β), et x est élément de B.

Par suite : $(\alpha) \Longrightarrow (\beta)$, entraîne l'inclusion $A \subset B$.

L'inclusion $A \subset B$ **équivaut à l'implication** $(\alpha) \Longrightarrow (\beta)$

REMARQUES

1. Pour démontrer l'inclusion $A \subset B$, il faut démontrer que **tout** élément de A est élément de B.

2. Pour démontrer la négation $A \not\subset B$, il **suffit** de prouver l'existence d'au moins un élément de A n'appartenant pas à B.

EXEMPLES

A : ensemble de mammifères.
B : ensemble des animaux terrestres.

$$A \not\subset B$$

car il existe un élément x tel que :

$$x \in A \qquad x \notin B$$

x = la baleine !

Fermat (mathématicien français (1601-1665) pensait que tous les entiers de la forme $a = (2^{2^n} + 1)$, expression dans laquelle n est un nombre entier, étaient des nombres premiers.

Si $n = 1$, $a = 5$; si $n = 3$, $a = 257$.

Euler (mathématicien suisse, 1707-1783) a prouvé qu'il n'en était pas ainsi, car pour $n = 5$, le nombre a obtenu est divisible par 641.

• PROPRIÉTÉS DE L'INCLUSION

L'inclusion a les propriétés suivantes :

Quels que soit l'ensemble E :

$$E \subset E$$

Quels que soient les ensembles E, F, G :

$$E \subset F \text{ et } F \subset G \Longrightarrow E \subset G$$

3. ÉGALITÉ DE DEUX ENSEMBLES ET ÉQUIVALENCE LOGIQUE

EXEMPLE

Soit A l'ensemble des entiers naturels dont l'écriture dans le système de base **dix** est terminée, à droite, par l'un des chiffres 0, 2, 4, 6 ou 8.
Soit B l'ensemble des entiers divisibles par 2.

On *démontre* que *tout* élément de A est élément de B et *tout* élément de B est élément de A, donc que A = B.



• DÉFINITION

Deux ensembles sont égaux s'ils comprennent les mêmes éléments.
Donc, si E et F sont des ensembles :

$$E = F \iff (x \in E) \iff (x \in F)$$

Cette notion correspond à la notion usuelle **d'identité** : c'est-à-dire que si deux ensembles E et F sont égaux, cela signifie que les lettres E et F représentent le même ensemble.

Remarquer que la notion usuelle d' « égalité » (de triangles, par exemple) est très différente.

Pour démontrer que deux ensembles A et B sont égaux, on démontrera que :
— *tout élément de* A *est élément de* B, *soit* $A \subset B$ (§ 2)
— *tout élément de* B *est élément de* A, *soit* $B \subset A$ (§ 2)

C'est-à-dire que :

$$A \subset B \text{ et } B \subset A \implies A = B$$



• ÉGALITÉ ENSEMBLISTE ET ÉQUIVALENCE LOGIQUE

Soit A et B deux ensembles donnés en **compréhension** : A ensemble des éléments ayant la propriété (α) ; B ensemble des éléments ayant la propriété (β),

$$A = \{x\,;\, x,\, (\alpha)\} \qquad B = \{y\,;\, y,\, (\beta)\}$$

L'égalité A = B traduit l'équivalence logique $(\alpha) \iff (\beta)$

Supposons que A = B et soit x tel que x, (α). Alors x appartient à A, donc x appartient à B ; donc x, (β) ; par suite (α) ⟹ (β). De même : (β) ⟹ (α).
Supposons que (α) ⟺ (β) et soit x élément de A. Alors x, (α), donc x, (β) ; donc x est élément de B. De même tout élément de B est élément de A.
Les **propriétés équivalentes** (α) **et** (β) sont dites **propriétés caractéristiques** de l'ensemble A (ou B).

4. COMPLÉMENTAIRE D'UN SOUS-ENSEMBLE ET NÉGATION LOGIQUE

EXEMPLE

Soit l'ensemble $E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ et A la partie de E définie par $A = \{4, 6, 8, 9\}$. A cette partie A de E est associée une nouvelle partie A′ de E, celle définie par : $\{2, 3, 5, 7\}$, c'est-à-dire formée des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. On dit que les parties A et A′ sont *complémentaires*.

• DÉFINITION



Soit E un ensemble et A une de ses parties (§ 2).
L'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A est le complémentaire (ou complément) de A par rapport à E.

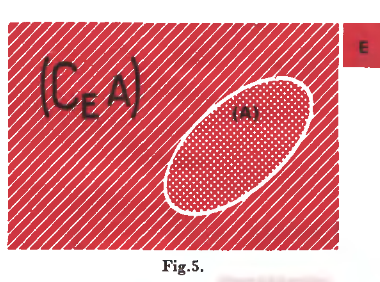


Fig.5.

On le note $\complement_E A$

Quand aucune confusion n'est possible en ce qui concerne l'ensemble E, on note simplement $\complement A$ ou ${}^{C}A$ le complémentaire de la partie A. C'est le cas lorsque tous les éléments considérés appartiennent à un même ensemble E, appelé le **référentiel.**

Donc : $x \in \complement_E A \iff x \in E \text{ et } x \notin A$

Ce qui est représenté figure 5.

• COMPLÉMENTAIRE ET NÉGATION LOGIQUE



Dans un référentiel E, si *être élément de la partie* A *c'est posséder la propriété* (α), *être élément du complémentaire* $\complement$ A *c'est* ne pas posséder la propriété (α), c'est-à-dire *posséder la propriété* (non α).



$$A = \{x \,;\, x, (\alpha)\} \iff \complement A = \{y \,;\, y, (\text{non } \alpha)\}$$

• PROPRIÉTÉS

— *Pour toute partie* A *de* E :

$$\begin{cases} \text{Si } x \in A, \text{ alors } x \notin \complement_E A, \text{ donc : } x \in \complement_E(\complement_E A) \\ \text{Si } x \in \complement_E(\complement_E A), \text{ alors } x \notin \complement_E A, \text{ donc : } x \in A \end{cases}$$

Donc : $\complement_E(\complement_E A) = A$ ce qui équivaut à non (non α) $\Longleftrightarrow$ (α)

On dit que A et $\complement_E A$ **sont complémentaires.**

— *Deux ensembles ayant le même complémentaire par rapport au même ensemble sont égaux.*

$$\complement_E A = \complement_E B \Longleftrightarrow A = B$$

En effet : si $\complement_E A = \complement_E B$, alors $\complement_E(\complement_E A) = \complement_E(\complement_E B)$ et donc : $A = B$.

— *Si* A *est inclus dans* B, *alors le complémentaire de* B *est inclus dans le complémentaire de* A (par rapport au même ensemble E).

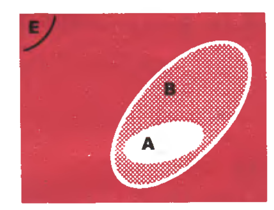
En effet $x \in \complement_E B$ implique $x \notin B$; si $A \subset B$, alors $x \notin B$ implique $x \notin A$ [contraposée de $(x \in A) \Longrightarrow (x \in B)$] ; donc : $x \in \complement_E A$.

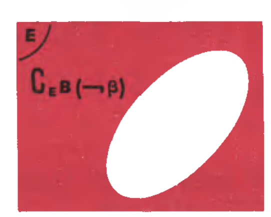
$$A \subset B \Longrightarrow \complement_E B \subset \complement_E A$$

Ceci est la traduction de l'équivalence logique :

$$[(\alpha) \Longrightarrow (\beta)] \Longleftrightarrow [(\text{non } \beta) \Longrightarrow (\text{non } \alpha)]$$

C'est ce qu'illustre la figure 6.





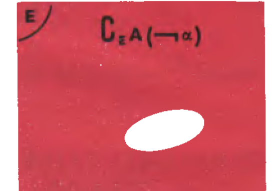


Fig. 6.

5. ENSEMBLE VIDE

EXEMPLES

❶ Soit E l'ensemble {1, 2, 3}.
Quel est l'ensemble $\complement_E E$?

Cet ensemble ne contient aucun élément ; on dit qu'il est **vide.**

❷ Que peut-on dire de l'ensemble des nombres entiers dont les carrés sont négatifs ?

Cet ensemble ne contient aucun élément ; on dit qu'il est **vide.**

• DÉFINITION



On appelle **ensemble vide,** *un ensemble ne comprenant aucun élément.* Nous conviendrons d'admettre que l'ensemble vide est unique.

On conçoit en effet que si, A et B sont deux ensembles vides, tout élément x de A appartient à B, puisque A n'a aucun élément ; et que tout élément de B est, de même, élément de A.

On désigne l'ensemble vide le symbole $\varnothing$

REMARQUES

❶ Par convention, l'ensemble vide est une **partie** de tout ensemble.
Donc quel que soit E, $\varnothing \subset E$.

❷ Quel que soit E, $\complement_E E = \varnothing$ et $\complement_E \varnothing = E$

6. LES QUANTIFICATEURS

• DÉFINITIONS



E étant l'ensemble référentiel et (α) une propriété, désignons par E (α) le sous-ensemble de E dont les éléments possèdent la prorpriété (α) :

$$E(\alpha) = \{x ;\ x \in E \ \text{ et } \ x,\ (\alpha)\}$$

— *Si* $E(\alpha) = E$, on écrit : $\forall x \in E, (\alpha)$ et on lit :



« *pour tout x* » appartenant à E, la propriété (α) est vraie,
ou « *quel que soit x* » appartenant à E, x possède la propriété α.

Le symbole $\forall$ est le **quantificateur universel.**

— Si $E(\alpha) \neq \varnothing$, on écrit : $\exists x \in E,\ (\alpha)$ et on lit :

« *il existe au moins un* » x appartenant à E et possédant la propriété α.
Plus brièvement : « *il existe un* » x... avec le sens de « *au moins un* ».

Le symbole $\exists$ est le **quantificateur existentiel.**

• APPLICATIONS

Les quantificateurs permettent des énoncés nets et précis, et une grande sûreté dans la négation d'une assertion. Ces deux symboles sont des signes logiques, donc soumis à des règles d'emploi très précises. On ne saurait donc les employer ni comme abréviations, ni dans des expressions telles que : E*?* *x*, dans le sens de : « existe-t-il un *x*?... ». Montrons deux exemples de leur utilisation.

— **La négation de** **$\forall x \in E, (\alpha)$** **est** **$\exists x \in E, (\text{non } \alpha)$**

En effet : $[\forall x \in E, (\alpha)]$ équivaut à $E(\alpha) = E$, ce qui équivaut à

$$\complement E(\alpha) = \emptyset$$

Cette proposition a pour négation

$$\complement E(\alpha) \neq \emptyset \quad \text{c'est-à-dire} \quad \exists x \in E(\alpha) \quad \text{ou} \quad \exists x, (\text{non } \alpha)$$

Donc :

$\text{non } [\forall x \in E, (\alpha)]$ **équivaut à** **$\exists x \in E (\text{non } \alpha)$**

Ainsi « *Tous les Crétois sont menteurs* » a pour négation « *Il existe au moins un Crétois non menteur* ».

— **La négation de** **$\exists x \in E, \alpha$** **est** **$\forall x \in E, (\text{non } \alpha)$**

En effet : $\exists x \in E, (\alpha)$ équivaut à $E(\alpha) \neq \emptyset$, ce qui équivaut à :

$$\complement E(\alpha) \neq E$$

Cette proposition a pour négation

$$\complement E(\alpha) = E, \quad \text{c'est-à-dire} \quad E(\text{non } \alpha) = E \quad \text{ou} \quad \forall x \in E, (\text{non } \alpha).$$

Donc :

$\text{non } [\exists x \in E, (\alpha)]$ **équivaut à** **$\forall x \in E, (\text{non } \alpha)$**

Ainsi « *Il existe au moins une Française rousse* » a pour négation « *Toutes les Françaises sont non rousses* ».

CONSTRUCTION D'ENSEMBLES A PARTIR D'ENSEMBLES DONNÉS

7. ENSEMBLE DES PARTIES D'UN ENSEMBLE

EXEMPLES

Soit E l'ensemble formé des trois lettres *a*, *b*, *c* : $E = \{a, b, c\}$.
Les sous-ensembles de E sont : $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}$.
L'ensemble, dont nous admettons l'existence, **des parties de E, est :**

$$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, E\}$$

• DÉFINITION

Nous admettons l'axiome suivant :
Les parties de tout ensemble E *sont les éléments d'un ensemble, appelé* **ensemble des parties de E** et noté $\mathfrak{P}(E)$



Par suite : $A \subset E \iff A \in \mathfrak{P}(E)$

$a \in E \iff \{a\} \in \mathfrak{P}(E)$

REMARQUES

❶ Quel que soit l'ensemble E : $\emptyset \in \mathfrak{P}(E)$ et $E \in \mathfrak{P}(E)$.

❷ L'ensemble $\mathfrak{P}(\emptyset)$ des parties de l'ensemble vide, comprend *un* élément... l'élément vide, soit $\mathfrak{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

8. PARTITION D'UN ENSEMBLE

EXEMPLES

❶ Dans un lycée, l'ensemble E des élèves est réparti en classes C_1, C_2... C_n de façon que :

- **aucune classe n'est vide ;**
- **deux classes distinctes n'ont pas d'élément commun ;**
- **tout élève du lycée appartient à une classe ;**

On dit que les classes C_1, C_2... C_n réalisent une **partition** de l'ensemble E.

Il est bon de remarquer que chaque élément de E (chaque élève) appartient à une classe et une seule. Par suite, chaque élève **détermine sa** classe. On dira qu'il est un « **représentant** » de cette classe.

② Soit E l'ensemble des vertébrés. La classification en mammifères, batraciens, oiseaux, reptiles, poissons, réalise une partition de l'ensemble E. Chaque élément **détermine** la classe à laquelle il appartient.

③ En musique, on réalise une partition d'une œuvre musicale lorsqu'on indique ce que doit exécuter chaque instrument. A noter que, par abus de langage, on appelle partition musicale les feuilles sur lesquelles sont présentés les morceaux à exécuter.

④ En héraldique, on a la **partition** ci-contre de l'écu :

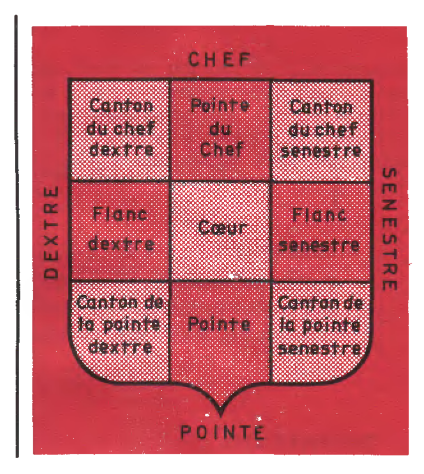


Fig. 7.



● **DÉFINITION**

Un ensemble de parties d'un ensemble E (*c'est-à-dire un sous-ensemble de* $\mathfrak{P}$(E)) *réalise une partition de* E *si :*

- *aucune partie n'est vide ;*
- *tout élément de E appartient à une classe ;*
- *deux parties distinctes n'ont pas d'élément commun.*

9. INTERSECTION DE DEUX ENSEMBLES ET CONJONCTION LOGIQUE

EXEMPLES

① Soit A l'ensemble des diviseurs de 18 :

$$A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

Soit B l'ensemble des diviseurs de 12 :

$$B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

Ces deux ensembles ont en commun les nombres 1, 2, 3, 6.

L'ensemble $\{1, 2, 3, 6\}$ s'appelle l'**intersection** des ensembles A et B.
On note :

$$A \cap B = \{1, 2, 3, 6\}$$

② Soit A l'ensemble des nombres pairs.

Soit B l'ensemble des multiples de 3. Ces deux ensembles ont-ils des éléments communs ?

Oui, ce sont les éléments de l'ensemble des nombres multiples de 2 **et** de 3, donc de l'ensemble des multiples de 6.

On dit que l'**ensemble C des multiples de 6** est l'**intersection** de l'ensemble A (des multiples de 2) et de l'ensemble B (des multiples de 3).
On note : $C = A \cap B$

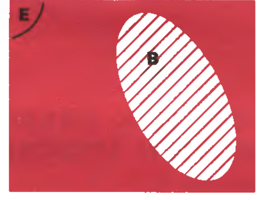
• DÉFINITION

L'intersection de deux ensembles A et B, est l'ensemble des éléments appartenant à la fois à A et à B.

On note cet ensemble $A \cap B$ et on lit « **A inter B** ».

Donc : $x \in A \cap B \iff x \in A$ **et** $x \in B$





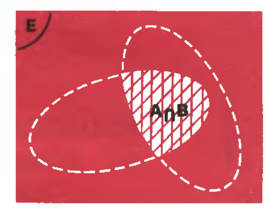


Fig. 8.

Si $A \cap B = \emptyset$, c'est-à-dire si les ensembles A et B n'ont pas d'éléments communs, A et B sont dits **disjoints.** Sinon, c'est-à-dire si $A \cap B \neq \emptyset$,

on dit que les ensembles A et B se rencontrent et on note $A \between B$

La notion d'intersection est illustrée figure 8.

• INTERSECTION ET CONJONCTION LOGIQUE



Si les ensembles A et B sont définis en compréhension, respectivement par les propriétés (α) et (β), c'est-à-dire si *être élément* de A c'est posséder la propriété (α) et si *être élément* de B c'est posséder la propriété (β), soit

$$A = \{x;\ x\ (\alpha)\} \quad \text{et } B = \{y;\ y(\beta)\}, \quad \text{alors}$$
$$A \cap B = \{x;\ x(\alpha) \quad \text{et} \quad x(\beta)\}$$

La notion d'**intersection** équivaut donc à la **conjonction logique** (Cf. 1re leçon, § 3).

REMARQUE

Si D et D′ sont des droites, ensembles de points, ayant comme seul point commun le point *a*, on doit noter :

$\{a\} = D \cap D'$ ou $a \in D \cap D'$ et non $a = D \cap D'$

• PROPRIÉTÉS DE L'INTERSECTION

Quels que soient les ensembles A, B, C, on démontre sans difficulté que :

$$A \cap \emptyset = \emptyset \qquad A \cap \complement_E A = \emptyset$$

$A \cap A = A$ (on dit que *l'intersection est idempotente).*

$A \cap B = B \cap A$ (on dit que l'*intersection est commutative).*

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (on dit que l'intersection est *associative* et on note $A \cap B \cap C$ l'ensemble obtenu).

10. RÉUNION DE DEUX ENSEMBLES ET DISJONCTION LOGIQUE

EXEMPLES

❶ Considérons les ensembles

$A = \{1, 2, 3, 5, 8, 12\}$

et $B = \{2, 4, 5, 9, 12\}$

Formons l'ensemble

$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 12\}$

Cet ensemble a pour éléments les nombres **appartenant à l'un au moins des ensembles A et B.**

On dit que C est la **réunion** des ensembles A et B.

On note $C = A \cup B$.

❷ Soit à résoudre l'inéquation

$(x + 4).(x - 3) > 0$ (x nombre réel)

En vertu de la règle des signes :

$(x + 4).(x - 3)$ sera positif si, et seulement si, les facteurs sont de même signe.

Désignons par A l'ensemble des nombres pour lesquels $(x + 4)$ et $(x - 3)$ sont positifs, par B l'ensemble des nombres pour lesquels $(x + 4)$ et $(x - 3)$ sont négatifs.

L'ensemble C des solutions est l'ensemble des nombres appartenant à l'un au moins des ensembles A et B.

Cet ensemble s'appelle la **réunion** de A et B.

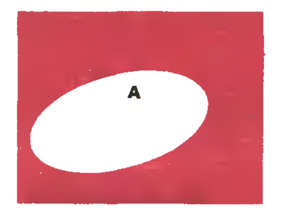
• DÉFINITION

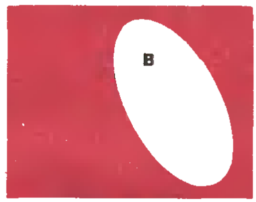
La réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à l'un au moins des ensembles A et B.

On note cet ensemble $A \cup B$ et on lit « A *union* B ».

Donc $x \in A \cup B \iff x \in A$ *ou* $x \in B$

La figure 9 illustre cette définition.





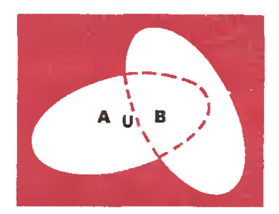


Fig. 9.

REMARQUE

L'ensemble $A \cup B$ a pour éléments :

- tous les éléments appartenant à A sans appartenir à B ;
- tous les éléments appartenant à B sans appartenir à A ;
- tous les éléments appartenant à la fois à A et à B (s'il en existe).



• RÉUNION ET DISJONCTION LOGIQUE

Si les ensembles A et B sont définis en compréhension par les propriétés (α) et (β) respectivement, c'est-à-dire *être élément* de A, c'est posséder la propriété (α) et *être élément* de B, c'est posséder la propriété (β) soit $A = \{x\,;\, x(\alpha)\}$, $B = \{y\,;\, y(\beta)\}$, alors $A \cup B = \{x\,;\; x(\alpha)$ *ou* $x(\beta)\}$.
Par suite être élément de $A \cup B$ c'est posséder au moins l'une des propriétés (α), (β).
La notion de **réunion** équivaut donc à la notion de **disjonction non exclusive** (Cf. 1re leçon, § 3).



• PROPRIÉTÉS DE LA RÉUNION

Quels que soient les ensembles A, B, C, *on démontre que* :

$A \cup \varnothing = A$

$A \cup A = A$ (la réunion est *idempotente*).

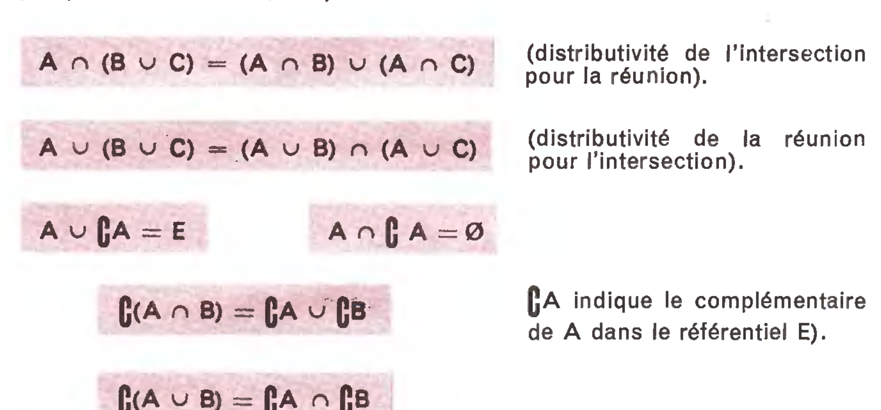
$A \cup \complement_E A = E$

$A \cup B = B \cup A$ (la réunion est *commutative*).

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (la réunion est *associative* et on note $A \cup B \cup C$ l'ensemble obtenu).

• RELATIONS ENTRE RÉUNION, INTERSECTION, COMPLÉMENTAIRES

Quelles que soient les parties A, B et C d'un ensemble E, *on démontre que* (cf. exercices 2-12 ; 2-14) :



$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributivité de l'intersection pour la réunion).

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivité de la réunion pour l'intersection).

$A \cup \complement A = E$ $A \cap \complement A = \emptyset$

$\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$ ($\complement A$ indique le complémentaire de A dans le référentiel E).

$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$

• RELATIONS AVEC LES RÈGLES DE LOGIQUE (Cf. 1re leçon)

— *La conjonction des assertions* $A \cup \complement A = E$ et $A \cap \complement A = \emptyset$

est la traduction ensembliste du **principe du tiers exclu.**

En effet, pour tout $x \in E$: ou $x \in A$ est vraie ou $x \in A$ est fausse ; donc $x \in A$ ou $x \in \complement A$; et $x \in A \cup \complement A$. D'autre part, pour x, on ne peut avoir à la fois $x \in A$ vraie et fausse, donc x ne peut être commun à A et à $\complement A$.

— *La relation* $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$ *est la traduction de :*

non [(α) ou (β)] $\iff$ (non α) et (non β)

- *La relation* $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement A$ *est la traduction de :*

non [(α) et (β)] $\iff$ (non α) ou (non β)

11. DIFFÉRENCES DE DEUX ENSEMBLES

EXEMPLES

1. Soit A l'ensemble {1, 5, 14, 25, 47}.
Soit B l'ensemble {0, 1, 3, 5, 25}.
Soit C l'ensemble {14, 47}.
On dit que C est la **différence A moins B.**
C'est l'ensemble des éléments de A n'appartenant pas à B. On note :

$$C = A - B$$

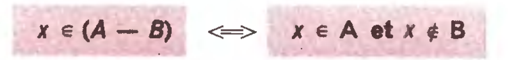
Remarquer que B — A = {0, 3}

2. Soit A l'ensemble des multiples de **cinq.**
Soit B l'ensemble des entiers pairs.
Supposons les nombres écrits dans la numération **décimale.**
On appelle **différence A moins B,** l'ensemble des éléments de A n'appartenant pas à B.
Cet ensemble, noté (A — B), a pour éléments les entiers qui se terminent par un cinq.

• DÉFINITION

La différence A moins B est l'ensemble dont les éléments appartiennent à A sans appartenir à B.
On la note A — B et on lit « **A** *moins* **B** ». Donc :





$$x \in (A - B) \iff x \in A \text{ et } x \notin B$$

Remarquons que $A - B = \complement_A (A \cap B)$

12. DIFFÉRENCE SYMÉTRIQUE DE DEUX ENSEMBLES ET DISJONCTION EXCLUSIVE

EXEMPLES

1. Soit A = {1, 5, 14, 25, 47}
et B = {0, 1, 3, 5, 25}
Alors (§ 11), C = A — B = {14, 47}
et D = B — A = {0, 3}
L'ensemble C ∪ D = {0, 3, 14, 47} s'appelle la **différence symétrique des ensembles A et B.**
On note :

$$A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A)$$

2. Soit A l'ensemble des multiples de **cinq** et B celui des entiers **pairs.**

Supposons les nombres écrits dans la numération *décimale*. Alors (A — B) est formé des entiers terminés par cinq ; (B — A) est formé des entiers dont le dernier chiffre de droite est 2, 4, 6, 8.

L'ensemble (A — B) ∪ (B — A) est la différence symétrique de A et B.

• DÉFINITION



La différence symétrique de deux ensembles A et B est l'ensemble T des éléments qui appartiennent à l'un ou l'autre des deux ensembles et non aux deux.

On la note : $T = A \Delta B$ et on lit : « **A** *delta* **B** »,

Donc :

$$x \in A \Delta B \iff (x \in A \quad \text{et} \quad x \notin B) \quad \text{ou} \quad (x \notin A \quad \text{et} \quad x \in B)$$

Nous avons illustré l'ensemble A Δ B, figure 10.

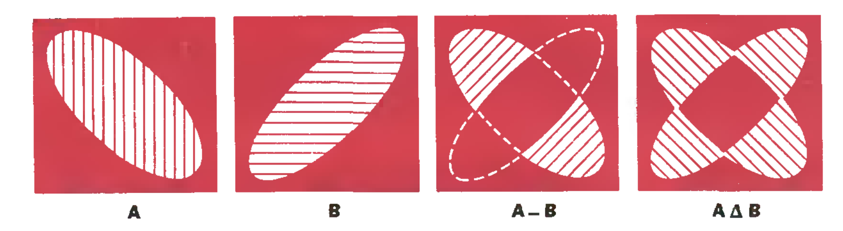


Fig. 10.

• DIFFÉRENCE SYMÉTRIQUE ET DISJONCTION EXCLUSIVE



Si, *être élément de* A c'est posséder une propriété (α) et *être élément* de B c'est posséder une propriété (β), c'est-à-dire si $A = \{x\,;\ x(\alpha)\}$ et $B = \{y\,;\ y(\beta)\}$,

alors $A \Delta B = \{x\,;\ [x(\alpha) \quad \text{et} \quad x(\text{non } \beta)] \quad \text{ou} \quad [x(\text{non } \alpha) \quad \text{et} \quad x(\beta)]\}$

C'est-à-dire qu'*être élément* de A Δ B, c'est posséder soit la propriété (α), soit la propriété (β) à l'*exclusion* de la possession simultanée des deux propriétés. La différence symétrique est donc la traduction du « ou *exclusif* ».

• REMARQUE

La définition se traduit par :

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) \qquad \text{ou} \qquad A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$



EXERCICES

2-1 Dans les figures ci-dessous le rectangle représente l'ensemble E de base. Définir (à l'aide des symboles ∩, ∪, et des symboles des ensembles complémentaires), les ensembles indiqués par des signes distinctifs (hachures, points...).

Fig. 11.

Fig. 12.

Fig. 13.

Fig. 14.

Fig. 15.

Fig. 16.

2-2 Soit A, B, C les ensembles (de lettres) suivants :

$$A = \{ a, b, c, d \} \qquad B = \{ c, d, e \} \qquad C = \{ d, e, b \}$$

Écrire toutes les intersections et toutes les réunions de ces ensembles pris deux à deux.

2-3 Quelle est l'intersection de l'ensemble des entiers pairs et de l'ensemble des multiples de 5 ?

Quelle est l'intersection de l'ensemble des quadrilatères et de l'ensemble des polygones réguliers ?

2-4 Dans l'ensemble E des triangles, on considère les sous-ensembles A (ensemble des triangles isocèles) et B (ensemble des triangles rectangles).

Définir les ensembles $A \cap B$, $\complement_E A$, $\complement_E B$, $\complement_E (A \cup B)$.

2-5 Soit A et B deux ensembles.

1° Vérifier, à l'aide d'une représentation, que : $A \cap B \subset A$; $A \cap B \subset B$; $A \subset A \cup B$; $B \subset A \cup B$.

2° Démontrer ces relations.

2-6 Soit E l'ensemble des nombres pairs de 2 à 40 :

$$E = \{ 2, 4, 6, 8, \dots 36, 38, 40 \}$$

On désigne par A le sous-ensemble de E formé des multiples de 4 ; par B le sous-ensemble de E formé des multiples de 3.

1° Écrire $\complement_E A$ et $\complement_E B$.

2° Former $H = \complement_E (A \cup B)$ et $K = \complement_E (A \cap B)$.

3° Former $\complement_E A \cap \complement_E B$ et $\complement_E A \cup \complement_E B$. Comparer ces ensembles à H et K.

2-7 Établir que : $(D \subset A, D \subset B$ et $D \subset C) \Longrightarrow [D \subset (A \cap B \cap C)]$
et que : $(A \subset D, B \subset D$ et $C \subset D) \Longrightarrow [(A \cup B \cup C) \subset D]$

2-8 $(A \cup B) \subset (A \cup C)$ implique-t-il : $B \subset C$?

2-9 $(A \cap B) \subset (A \cap C)$ implique-t-il : $B \subset C$?

2-10 Établir que $\left\{ \begin{array}{c} (A \cup B) \subset (A \cup C) \\ \text{et} \\ (A \cap B) \subset (A \cap C) \end{array} \right\} \Longrightarrow B \subset C.$

2-11 Déterminer les ensembles :

$V = A \cap B \cap A \cap C \qquad W = A \cup B \cup A \cup C$

$X = (A \cup B) \cap (A \cup {}^{C}B) \qquad Y = ({}^{C}A \cup {}^{C}B) \cap ({}^{C}A \cup B)$

2-12 Soit trois ensembles A, B, C.

1° Vérifier, à l'aide de figures, que : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

2° On désigne par E l'ensemble $A \cup (B \cap C)$;
par F l'ensemble $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

a) Démontrer que tout élément x de E est élément de F.

b) Démontrer que tout élément y de F est élément de E.

Conclure.

3° Retrouver le résultat à l'aide des Tables de vérité (Cf. 1re leçon).

2-13 Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. On désigne par $\complement A$ et $\complement B$ les complémentaires, par rapport à E, de A et B.

1° Vérifier, à l'aide de figures, que :

$$\complement A \cup \complement B = \complement (A \cap B) \quad \text{et} \quad \complement A \cap \complement B = \complement (A \cup B)$$

2° On désigne par E l'ensemble $\complement A \cap \complement B$; par F l'ensemble $\complement (A \cup B)$.

a) Démontrer que tout élément x de E est élément de F.

b) Démontrer que tout élément y de F est élément de E.

Conclure.

3° On désigne par E′ l'ensemble $\complement A \cup \complement B$; par F′ l'ensemble $\complement (A \cap B)$.

En procédant comme ci-dessus, démontrer que $E' = F'$.

4° Retrouver ces résultats à l'aide des Tables de vérité.

2-14 Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. On désigne par $\complement A$ le complémentaire de A par rapport à E.

1° Vérifier, sur une figure, l'équivalence : $A \subset B \Longleftrightarrow \left[\left(\complement A \right) \cup B = E \right]$.

2° On désigne par E′ l'ensemble $\left(\complement A \right) \cup B$.

Démontrer que $A \subset B \Longleftrightarrow E = E'$.

3° Démontrer de même que $A \subset B \Longleftrightarrow (A \cap \complement B = \varnothing)$.

4° Retrouver ces résultats à l'aide des Tables de vérité.

2-15 Soit $A \Delta B$ la différence symétrique de deux sous-ensembles A et B de E.

1° Représenter sur une figure l'ensemble $(A \Delta B)$.

2° Vérifier et démontrer que $(A \Delta B) = (B \Delta A)$.

3° Vérifier et démontrer que :

$$(A \Delta B) = (A \cup B) - (A \cap B) = (A \cap \complement B) \cap (B \cap \complement A).$$

4° Vérifier sur une figure, puis démontrer que $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

5° Construire la Table de vérité du « *ou exclusif* ».

6° Retrouver les résultats précédents à l'aide de ces Tables.

2-16 Démontrer que : $[\exists x, (p \text{ et } q)] \Longrightarrow [\exists x, (p) \text{ et } \exists x, (q)]$.

2-17 Démontrer que : $[\exists x, (p) \text{ et } \exists x, (p)]$ n'implique pas : $[\exists x, (p \text{ et } q)]$.

2-18 Démontrer que : $[\exists x, (p \text{ ou } q)] \Longrightarrow [\exists x, (p) \text{ ou } \exists x, (q)]$.

2-19 Démontrer que : $[\forall x, (p) \text{ ou } \forall x, (q)] \Longrightarrow [\forall x, (p \text{ ou } q)]$.

2-20 Former les négations de : $\forall x \in E, [p \text{ et } (\text{non } q)]$.
$\forall x \in E, [p \text{ ou } (\text{non } q)]$.

INDICATIONS

2-10 Exemple de démonstration *par disjonction des cas*, que nous explicitons.

Par hypothèse $\begin{cases} (1) \quad (A \cup B) \subset A \cup (C) \\ \quad\quad \text{et} \\ (2) \quad (A \cap B) \subset (A \cap C) \end{cases}$

Soit x appartenant à B :

si $x \in A$, alors $x \in A \cap B$; d'après (2) $x \in A \cap C$, donc $x \in C$
si $x \notin A$, alors $x \in A \cup B$; d'après (1) $x \in A \cup C$ et comme $x \notin A$, $x \in C$

2-11 $X = A \qquad Y = {}^{\complement}A$.

2-12 3° Les Tables de vérité sont construites en écrivant V ou F, selon qu'un élément appartient ou n'appartient pas à l'ensemble considéré.

A	B	C	A ∪ B	A ∪ C	(A ∪ B) ∩ (A ∪ C)	B ∩ C	A ∪ (B ∩ C)
V	V	Y	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	V	F	V
V	F	F	V	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	V	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

↑ Comparer ↑

2-15 5°

A	B	A Δ B
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

2-20 *non* [∀ x ∈ E, (p et *non* q)] est { Ex ∈ E, *non* [p et (*non* q)] }.
Il reste à expliciter la négation de *et* ou celle de *ou*.

RELATIONS BINAIRES



● *Dans la leçon précédente, nous avons donné quelques notions simples relatives aux ensembles. Mais alors que les éléments de ces ensembles ont étéé tudiés indépendamment les uns des autres, nous nous proposons dans cette leçon de « mettre en correspondance » (« en relation »), les éléments d'un ensemble entre eux ou avec ceux d'un autre ensemble. Puis sont étudiées les qualités de la « correspondance », appelée* **« relation binaire »** *lorsqu'elle porte sur deux éléments.*

● *Parmi les nombreux exemples que nous offre la « vie courante », citons les relations :*

— **« être né à » :** *qui, à tout élément de l'ensemble* (H) *des habitants de la Terre, « associe » un élément de l'ensemble* (V) *des villes de la Terre ;*

— **« avoir pour femme » :** *qui, à tout élément d'un ensemble* (H) *d'hommes associe zéro, un ou plusieurs (si la polygamie est possible) élément d'un ensemble* (F) *de femmes ;*

— **« avoir pour enfant » :** *qui, à tout élément de l'ensemble* (H) *des habitants de la Terre, associe zéro, un ou plusieurs éléments de* **ce même ensemble.**

— (A) *étant l'ensemble ayant pour éléments les nombres entiers de* 1 *à* 95, *l'ensemble* (B) *des automobiles* **immatriculées** *en France est, parmi l'ensemble des voitures circulant en France, formé des voitures en « relation » avec un élément de l'ensemble* (A).

● *Nous abordons dans la leçon suivante l'étude d'un cas particulier important : celui des* **relations binaires définies sur un ensemble,** *par lesquelles sont mis en correspondance entre eux les éléments* **d'un même ensemble.**

● *Signalons enfin que, si nous exposons ici,* **a priori,** *certaines notions, c'est dans un souci de synthèse et afin de définir un vocabulaire constamment utilisé. Dans la suite de ce cours, nous nous référerons souvent à cette leçon, ce qui en soulignera l'importance.*

1. COUPLE

Rappelons qu'une **paire** est un ensemble comprenant deux éléments (2e leçon, § 1). Si x et y sont ces éléments, la paire qu'ils constituent est notée $\{x, y\}$ ou $\{y, x\}$. Il est souvent utile, en mathématiques et dans la vie courante (par exemple s'il s'agit d'une « paire » de chaussures ou d'une « paire » de bœufs), de distinguer les rôles joués par chacun des éléments d'une paire. On obtient ainsi une **paire rangée** ou **couple.**

• DÉFINITIONS

— Un **couple** est un *objet mathématique* tel que l'*égalité de deux couples u* et u' notés par exemple (x, y) et (x', y') est définie par :

$$(x, y) = (x', y') \Longrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

Si u est le couple noté (x, y), on écrit $u = (x, y)$ et on lit « *couple* x, y ».

Du point de vue intuitif, un couple est un « ensemble rangé » de deux éléments.

— L'élément x est l'*origine*, ou *première projection* du couple ; on note :

$$x = pr_1 u$$

— L'élément y est l'*extrémité*, ou *deuxième projection* du couple ; on note :

$$y = pr_2 u$$

Remarquons que si $x \neq y$, alors $(x, y) \neq (y, x)$.

Les couples (x, y) et (y, x) sont dits *transposés* l'un de l'autre.

2. PRODUIT CARTÉSIEN DE DEUX ENSEMBLES

EXEMPLES

❶ Soit A et B les deux ensembles :
A = { 0, 1, 4 } et B = { 1, 3, 5, 6 }
Formons tous les couples dont l'origine appartient à A et l'extrémité à B, soit :

$$\left\{ \begin{matrix} (0, 1), & (0, 3), & (0, 5), & (0, 6) \\ (1, 1), & (1, 3), & (1, 5), & (1, 6) \\ (4, 1), & (4, 3), & (4, 5), & (4, 6) \end{matrix} \right\}$$

L'ensemble dont les éléments sont tous les couples obtenus ci-dessus s'appelle **le produit cartésien de l'ensemble A par l'ensemble B** (ou ensemble-produit).
On note **A × B** cet ensemble.

❷ Soit A et B les deux ensembles donnés en ❶. Formons tous les couples dont l'origine appartient à B et l'extrémité à A, soit :

$$\left\{ \begin{matrix} (1, 0) & (1, 1) & (1, 4) \\ (3, 0) & (3, 1) & (3, 4) \\ (5, 0) & (5, 1) & (5, 4) \\ (6, 0) & (6, 1) & (6, 4) \end{matrix} \right\}$$

L'ensemble formé de tous les couples obtenus ci-dessus s'appelle **le produit cartésien de l'ensemble B par l'ensemble A.**
On note **B × A** cet ensemble.

• DÉFINITION



Le produit cartésien (ou ensemble-produit) d'un ensemble E par un ensemble F est l'ensemble de tous les couples dont l'origine est un élément de E et l'extrémité un élément de F.

On le note : E × F ce qui se lit « E *croix* F ».

Donc : $$E \times F = \{u = (x, y) ; \quad x \in E, \quad y \in F\}$$

On dit que x **décrit** E et que y **décrit** F.

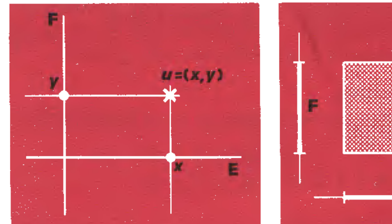
REMARQUES

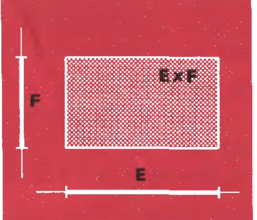
❶ Si F = E, on obtient le produit cartésien d'un ensemble E par lui-même (noté E × E, ou E^2, ce qui se lit « E deux »).
Par exemple, si E = { a, b, c }, alors :

$$E^2 = \{ (a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c,) (c, a), (c, b), (c, c) \}$$

❷ On désigne par **diagonale** de E × E l'ensemble des couples (x, x).

❸ La notion de produit cartésien s'étend immédiatement au produit de plus de deux ensembles.





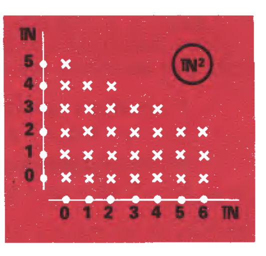


Fig. 1.

4 Le terme « cartésien » est lié à l'illustration de cette notion par les figures ci-dessus (fig. 1), inspirées de la géométrie analytique de Descartes. Les ensembles E et F sont représentés par les points de droites ou de segments, ou des successions de points séparés.

5 Un produit cartésien $E \times F$ est vide dès que l'un au moins des ensembles E ou F est vide.

6 Le produit $A \times B$ est distinct de $B \times A$ dès que B est différent de A.

3. GRAPHES

DÉFINITION

Un graphe est un ensemble de couples. Si le premier élément du couple appartient à un ensemble E et si le deuxième appartient à un ensemble F, **un graphe est donc un sous-ensemble du produit cartésien** $E \times F$.



Soit $\mathcal{G}$ un graphe, sous-ensemble de $E \times F$. On note $pr_1\mathcal{G}$ (lu « **première projection de** $\mathcal{G}$ ») l'ensemble ayant pour éléments les premiers éléments des couples de $\mathcal{G}$. C'est un sous-ensemble de E. De même, on note $pr_2\mathcal{G}$ (lu « **deuxième projection de** $\mathcal{G}$ »), l'ensemble des seconds éléments des couples de $\mathcal{G}$. C'est un sous-ensemble de F.

REPRÉSENTATION DES GRAPHES

Les graphes sont représentés par divers *schémas.*

1° Le premier et le deuxième élément du couple sont respectivement l' « abscisse » et l' « ordonnée » du point représentant le couple, rapporté à deux axes (fig. 2).

2° **Tableau à simple entrée.** Les éléments de E sont, par exemple, écrits « *horizontalement* » et ceux de F « *verticalement* ». On marque d'un signe, une croix par exemple, les *cases* correspondant à un élément du graphe.

Nous avons représenté (fig. 3), le graphe
$\mathcal{G} = \{(-3,0), (-3,1), (-3,9), (-2,4), (-1,1), (0,0), (1,1), (1,4), (2,9)\}$
sous-ensemble de $E \times F$ avec :
$E = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ et $F = \{0, 1, 4, 5, 9\}$.

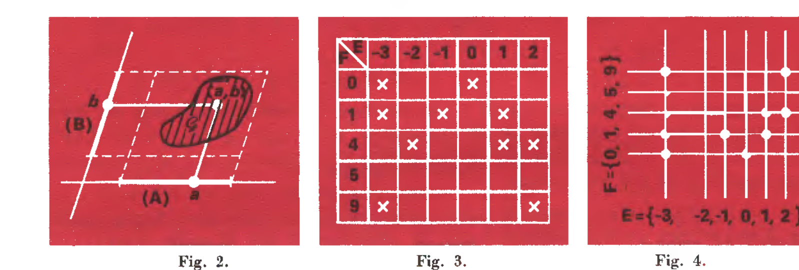


Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4.

3° **Diagramme cartésien.** Il s'agit d'un quadrillage formé de droites illustrant chacun des éléments des ensembles considérés. En général les lignes verticales correspondent à l'ensemble de « départ » E. Nous avons ainsi illustré (fig. 4), le graphe $\mathcal{G}$.

4° **Les éléments de chacun des ensembles sont figurés par des points** et un segment de droite joint chaque origine d'un couple à son extrémité. C'est la représentation **duale** de la précédente. Nous avons ainsi représenté (fig. 5), le graphe $\mathcal{G}$.

5° **Diagramme sagittal de Venn, ou d'Euler.** Les ensembles E et F sont représentés par des « nuages de points » entourés d'une ligne. Une flèche joint l'origine de chaque couple à son extrémité (fig. 6).

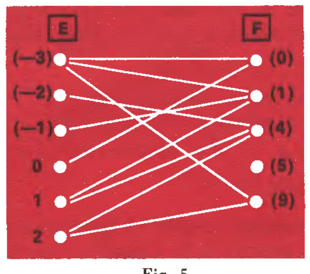


Fig. 5.

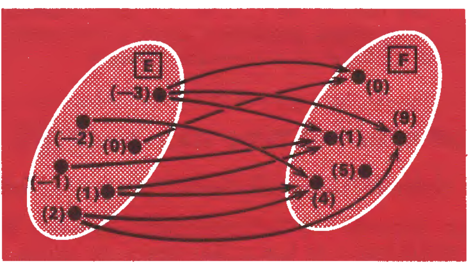


Fig. 6.

4. RELATIONS BINAIRES

EXEMPLES

① On considère l'ensemble :

$$A = \{r, j, b\}$$

des couleurs primaires : rouge, jaune, bleu et l'ensemble :

$$B = \{V, v, O\}$$

des couleurs secondaires : vert, violet, orange.

On donne le graphe $\mathcal{G}$ (sous-ensemble de $A \times B$) représenté ci-dessous. La proposition, vraie pour certains couples, $(x, y) \in \mathcal{G}$ est une **relation binaire** de A vers B, qui peut s'énoncer:

« *x entre dans la composition de* y. »

② Soit les ensembles :

$A = \{0, 1, 4\}$ et $B = \{1, 3, 5, 6\}$

Quels sont les couples (x, y) vérifiant

$x + y < 6$ (avec $x \in A$, $y \in B$) ?

En se reportant au § 2, il vient :

$\mathcal{G} =$
$\{(0, 1) ; (0, 3) ; (0, 5) ; (1, 1) ; (1, 3) ; (4, 1)\}$

On dit que la « condition »

$x + y < 6$ (avec $x \in A$ et $y \in B$)

est une **relation binaire** dont $\mathcal{G}$ est le **graphe.**

Ce que l'on peut illustrer de l'une ou l'autre des deux manières ci-dessous.

B \ A	r	j	b
V	.	×	×
v	×		×
O	×	×	

Fig. 7.

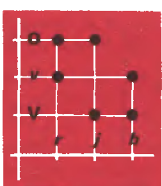
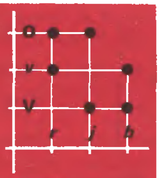



Fig. 8.

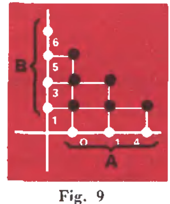
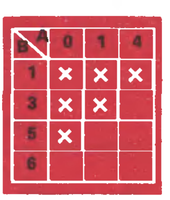




Fig. 9



B \ A	0	1	4
1	×	×	×
3	×	×	
5	×		
6			

Fig. 10.

● DÉFINITION



E et F étant deux ensembles, toute proposition vraie pour certains couples (x, y) de E × F est une relation binaire $\mathcal{R}$ de E vers F.

Si la proposition est vraie pour le couple (x, y), on note $x \mathcal{R} y$ ou $\mathcal{R}\{x, y\}$



et on lit « **x est en relation avec y** » ou « **x, r, y** ».
L'ensemble des couples (x, y) tels que $x \mathcal{R} y$ est un sous-ensemble de $E \times F$, appelé **graphe de la relation** et noté $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$

● **Inversement,** soit E et F deux ensembles donnés et $\mathcal{G}$ un graphe, (ou partie de $E \times F$). On peut énoncer le fait qu'un couple (x, y) est élément de $\mathcal{G}$, soit $(x, y) \in \mathcal{G}$, en disant :

x (origine du couple) } est en **relation** avec { *y* (extrémité du couple)

Le graphe $\mathcal{G}$ détermine alors la **relation binaire $\mathcal{R}$ de E vers F,** définie par : **$x \mathcal{R} y$ si et seulement si (x, y) appartient à $\mathcal{G}$.**

Dans les deux cas : $x \mathcal{R} y \iff (x, y) \in \mathcal{G}_{\mathcal{R}}$

- **Ainsi la notion de graphe est l'équivalent de la notion logique de relation binaire.**

L'ensemble E est appelé ensemble de **départ** (ou ensemble *source*) ; F est l'ensemble d'**arrivée** (ou ensemble *cible*).
Si la relation $\mathcal{R}$ est vérifiée pour tout couple (x, *y*), c'est-à-dire si $\mathcal{G}_{\mathcal{R}} = E \times F$, la relation est dite **triviale.**

REMARQUES

1. Une relation binaire s'exprime, dans le langage courant, en remplaçant le symbole $\mathcal{R}$ par un **verbe** ou une **expression verbale** ; le premier élément du couple est le **sujet** et le deuxième est le **complément** (au sens grammatical).
Citons, en reprenant les exemples de l'introduction :
« **x** est né à **y** » ; « **x** a pour femme **y** » ; « **x** a pour enfant **y** » ; « **x** a sa plaque d'immatriculation terminée par le nombre **y** ».

2. Certaines relations binaires usuelles sont représentées par de symboles particuliers. Citons par exemple (le lecteur précisera les ensembles de départ et d'arrivée):

$=$	être égal à...	$\leqslant$	être inférieur, au sens large, à...
$\neq$	être différent de...	$\mid$	diviser...
$\iff$	être équivalent logiquement à...	$//$	être parallèle à...
$\in$	appartenir à...	$\perp$	être perpendiculaire à...
$\subset$	être inclus dans...		

• ÉGALITÉ DE DEUX RELATIONS BINAIRES

L'égalité de deux relations binaires $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ de E vers F est définie par l'égalité de leurs graphes :

$$\mathcal{R} = \mathcal{S} \iff \mathcal{G}_{\mathcal{R}} = \mathcal{G}_{\mathcal{S}}$$

Si les relations ne sont pas données par leurs graphes, l'égalité est définie par :

$$\mathcal{R} = \mathcal{S} \iff \forall x \in E, \quad \mathcal{R}(x) = \mathcal{S}(x)$$

• RELATION RÉCIPROQUE

La relation réciproque de la relation binaire $\mathcal{R}$ de E vers F est la relation binaire de F vers E, notée $\overset{-1}{\mathcal{R}}$ **définie par :**

$$y \overset{-1}{\mathcal{R}} x \iff x \mathcal{R} y$$

EXEMPLE

Dans l'ensemble des entiers naturels non nuls, si $\mathcal{R}$ est la relation « **diviser** », $\overset{-1}{\mathcal{R}}$ est la relation « **être multiple de** ». Ainsi : $5\,\mathcal{R}\,30$ et $30\,\overset{-1}{\mathcal{R}}\,5$.

5. COMPOSITION DES RELATIONS BINAIRES

EXEMPLE

Soit, dans un ensemble d'humains, les relations binaires $\mathcal{R}$: « *avoir pour enfant* » et $\mathcal{S}$: « *avoir pour fille* ».

Si $x\mathcal{R}z$, c'est-à-dire x a pour enfant z, et si $z\mathcal{S}y$ c'est-à-dire z a pour fille y, il existe une nouvelle relation binaire entre x et y. C'est : x « *a pour petite-fille* » y.

Cette relation est *notée* $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$; elle est dite **composée** de $\mathcal{R}$ par $\mathcal{S}$.

Ce résultat est illustré sur la figure 11 : *flèches* en traits pointillés (relation $\mathcal{R}$) *flèches* en traits tiretés (relation $\mathcal{S}$), *flèches* en traits pleins (relation $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$).

Noter que l'absence de certaines flèches indique que la proposition n'est pas vérifiée.

Remarquer que la relation composée de $\mathcal{S}$ par $\mathcal{R}$, (notée $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$), est distincte de $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$. C'est la relation « *avoir pour petit-enfant*, né d'une fille ».

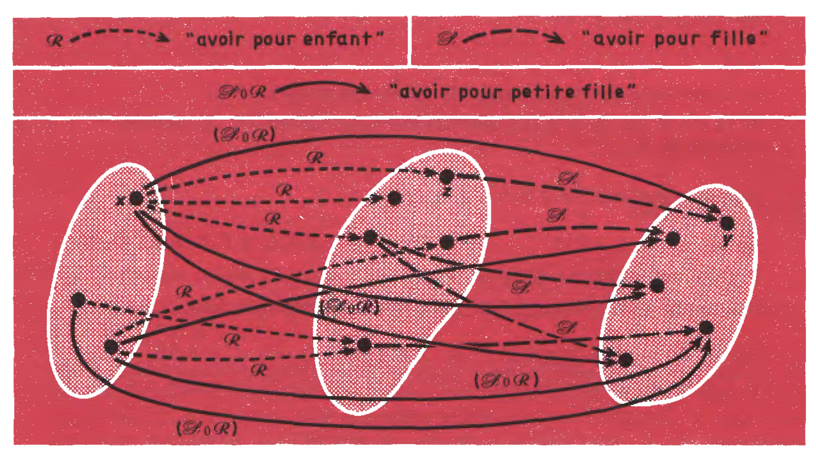


Fig. 11.



DÉFINITION

Soit $\mathfrak{R}$ une relation binaire définie de l'ensemble E vers l'ensemble F et $\mathfrak{S}$ une relation binaire définie de l'ensemble F vers l'ensemble G. La composée de $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{S}$ est la relation binaire $\mathfrak{T}$, de E vers G, définie par :

$$x\,\mathfrak{T}\,y \iff x \in E,\quad y \in G,\quad \exists z \in F,\quad x\,\mathfrak{R}\,z \text{ et } z\,\mathfrak{S}\,y$$

La relation $\mathfrak{T}$ est notée $\mathfrak{T} = \mathfrak{S} \circ \mathfrak{R}$ et on lit « $\mathfrak{S}$ *rond* $\mathfrak{R}$ ».

REMARQUE

Si $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}$, alors $\mathfrak{R} \circ \mathfrak{R}$ est notée $\mathfrak{R}^2$.



EXERCICES

3-1 Soit les ensembles $E = \{1, 2, 5, 8\}$ et $F = \{2, 5, 9\}$.

1° Quel est l'ensemble $E \times F$?

2° Quel est l'ensemble $F \times E$?

3° Quel est le graphe $\mathcal{G}$ de la relation $\mathfrak{R}$: « l'origine du couple de $E \times F$ est strictement inférieure à l'extrémité ».

4° Représenter graphiquement $\mathcal{G}$.

3-2 Mêmes questions pour $E = \{-3, -1, 0, 4\}$ et $F = \{-2, -1, 1, 4, 6\}$.

3-3 Soit $E = \{a, b, c\}$.

1° Écrire en extension l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ des parties de E.

2° Si $x \in E$ et $A \in \mathfrak{P}(E)$, représenter graphiquement la relation $\mathfrak{R}$: « x est élément de A ».

3-4 Mêmes questions pour $E = \{a, b, c, d\}$.

3-5 Soit $E = \{0, 1, 2, 3, 4,\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

1° Quel est le graphe $\mathcal{G}$ de la relation $\mathfrak{R}$: « $x(\in E)$ divise exactement $y(\in F)$ » ?

2° Donner une représentation graphique de cette relation.

3-6 Soit $E = \{-7, -2, 1, 2\}$ et $F = \{-8, -6, -4, 0, 2\}$.

1° Définir, en extension le graphe $\mathcal{G}$ de la relation $\mathfrak{R}$ de E vers F :

$$x\,\mathfrak{R}\,y \iff x + y \leqslant -1$$

2° Représenter graphiquement $\mathfrak{R}$.

3-7 Soit $E = \{ a, b, c \}$.

1° Définir, en extension, l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ des parties de E.

2° Quel est le graphe de la relation de $\mathfrak{P}(E)$ vers $\mathfrak{P}(E)$:

$$« A \mathcal{R} B \iff A \subset B »?$$

3° Représenter graphiquement cette relation.

3-8 Mêmes questions pour $E = \{ a, b, c, d \}$.

3-9 Soit les trois ensembles

$$E = \{ 0, 1, 2, 4, 9 \} \qquad F = \{ 0, 1, -1, 2, 3, -3 \} \qquad G = \{ -5, -1, 1, 3 \}.$$

1° Représenter graphiquement la relation $\mathcal{R}$ de E vers F telle que $x \mathcal{R} y$ équivaut à x est le carré de y.

2° Représenter graphiquement la relation $\mathcal{S}$ de F vers G telle que $y \mathcal{S} z$ équivaut à y est inférieur (au sens strict) à z.

3° Définir en extension le graphe $\mathcal{G}$ de la relation $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ de E vers G.



INDICATIONS

• **Descartes** (René), né le 31 mars 1596 à La Haye, près de Tours, mort à Stockholm le 11 février 1650.

Philosophe et mathématicien, hésita longtemps sur le choix d'une occupation, tantôt militaire, tantôt mondain, tantôt retiré dans la solitude. Du point de vue mathématique, Descartes est le créateur de la **géométrie analytique** pour, disait-il, « *rapprocher la géométrie des Anciens et l'algèbre des Modernes* » (déjà !). De là, les expressions : graphiques, repères, coordonnées, diagrammes **cartésiens**.

• **Euler** (Léonard) né à Bâle le 15 avril 1707, mort à Saint-Pétersbourg le 18 septembre 1783.

L'un des plus grands mathématiciens suisses. Ses travaux essentiels portèrent sur l'*analyse*, la *mécanique*, les *entiers naturels*.

• **Venn** (John), né en 1834, mort en 1923.

Mathématicien et logicien anglais. Fut professeur à l'Université de Cambridge.

3-1 1° $E \times F = \{ (1,2), (1,5), (1,9), (2,2), (2,5), (2,9), (5,2), (5,5), (5,9), (8,2), (8,5), (8,9) \}$

3° $\mathcal{G} = \{ (1,2), (1,5), (1,9), (2,5), (2,9), (5,9), (8,9) \}$

4° Cf. figure 12.

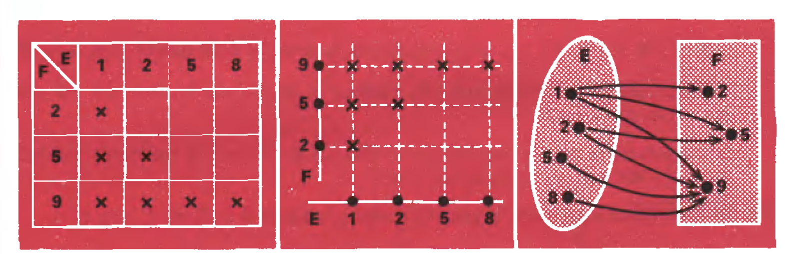


Fig. 12.

3-3 1° $\mathcal{P}(E) = \{ \emptyset, \{ a \}, \{ b \} \{ c \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, E \}$

2° Cf. figure 13.

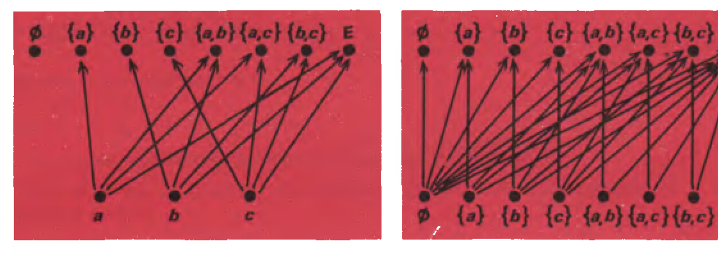


Fig. 13. Fig. 14.

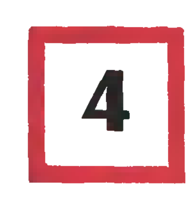
3-5 1° Par exemple : $(2,4) \in \mathcal{G}$ $(3,6) \in \mathcal{G}$ $(2,7) \notin \mathcal{G}$ $(6,3) \notin \mathcal{G}$.

3-7 1° Cf. 3-3.

2° Cf. figure 14.

3-9 3° $\mathcal{G} = \{ (0, 1), (0,3), (1,3), (-1,1), (2,3) \}$.

RELATIONS BINAIRES DANS UN ENSEMBLE



Dans cette leçon sont étudiées les relations binaires définies dans un ensemble E, *c'est-à-dire les graphes du produit cartésien* $E \times E$. *Tout ce qui a été dit dans la leçon précédente est évidemment valable. De plus, des propriétés nouvelles peuvent être envisagées, du fait qu'***un élément de E peut intervenir soit comme premier élément** *d'un couple,* **soit comme second élément.** *(Ce qui n'était pas possible lorsque les ensembles* E *et* F *étaient différents comme par exemple, dans la relation* **« être né à »**, *dans laquelle le premier élément est un être vivant, le second un lieu).*

1. RELATIONS BINAIRES RÉFLEXIVES

EXEMPLE ET CONTRE-EXEMPLE

❶ Soit, dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels la relation : **« avoir la même parité que... »**. Les couples (0, 0), (1, 1), (2, 2), ... et, quel que soit x, le couple (x, x), appartiennent au graphe de $\mathcal{R}$.

Donc : $\forall x \in \mathbb{N}, \quad x \mathcal{R} x$

❷ Soit, dans l'ensemble $\mathbb{N}$ la relation $\mathcal{R}$: **« avoir pour carré »**. Seuls parmi les couples de la forme (n, n), les couples (0, 0), et (1, 1) vérifient la relation.

Donc : $x \mathcal{R} x$ n'est pas vérifié pour tout x.

• DÉFINITION

Une relation binaire, définie dans un ensemble, est réflexive si, quel que soit l'élément x de l'ensemble, le couple (x, x) vérifie la relation.

Donc, dans E, $\mathcal{R}$ *réflexive* $\iff$ $\forall x \in E, \quad x \mathcal{R} x$

On peut dire aussi que le graphe $\mathcal{G}$ de la relation $\mathcal{R}$ contient l'ensemble des couples (x, x). Cet ensemble est appelé *diagonale* de E^2.

Donc : $\mathcal{R}$ *réflexive* $\iff$ (diagonale de E^2) $\subset \mathcal{G}_{\mathcal{R}}$

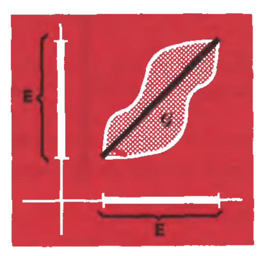


Fig. 1. Relation réflexive.

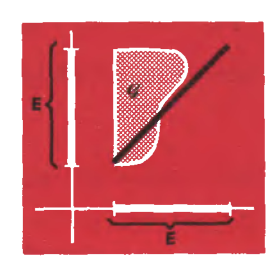


Fig. 2. Relation non réflexive.

- Dans l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ des parties d'un ensemble E, **l'inclusion** et **l'égalité** sont des relations binaires **réflexives.**

2. RELATIONS BINAIRES SYMÉTRIQUES

EXEMPLE ET CONTRE-EXEMPLE

❶ Reprenons l'exemple précédent : les entiers *a* et *b* vérifient la relation $\mathfrak{R}$ s'ils ont même parité.
Les couples (1, 3) et (3, 1), par exemple, vérifient la relation.
Plus généralement, si un couple (x, y) appartient au graphe de la relation, le couple transposé (y, x) appartient également au graphe.
La relation $\mathfrak{R}$ est dite **symétrique,** ce qui signifie que :

$$x \,\mathfrak{R}\, y \Longleftrightarrow y \,\mathfrak{R}\, x.$$

❷ Reprenons dans $\mathbb{N}$, la relation **« avoir pour carré ».** Le couple (2, 4), par exemple, vérifie la relation, mais le couple transposé (4, 2) ne le vérifie pas.

Plus généralement, si le couple (x, y) vérifie la relation, le couple (y, x) ne la vérifie pas nécessairement.

La relation considérée n'est pas symétrique.

DÉFINITION

Une relation binaire, définie dans un ensemble, est symétrique si, quel que soit le couple (x, y) vérifiant la relation, alors le couple transposé (y, x) la vérifie également.

Si $\mathfrak{R}$ est la relation considérée et (x, y) un couple :

$$\mathfrak{R} \text{ symétrique} \Longleftrightarrow x \,\mathfrak{R}\, y \Longleftrightarrow y \,\mathfrak{R}\, x$$

Ou, si $\mathfrak{G}_{\mathfrak{R}}$ est le graphe de la relation $\mathfrak{R}$:

$$\mathfrak{R} \text{ symétrique} \Longleftrightarrow (x, y) \in \mathfrak{G}_{\mathfrak{R}} \Longleftrightarrow (y, x) \in \mathfrak{G}_{\mathfrak{R}}$$

- Dans $\mathfrak{P}(E)$, **l'égalité** est une relation symétrique, **l'inclusion** ne l'est pas.

3. RELATIONS BINAIRES TRANSITIVES

EXEMPLE ET CONTRE-EXEMPLE

1. Soit, dans un ensemble E d'enfants, la relation $\mathcal{R}$ « **être le frère ou la sœur de** ».
Si un couple (x, y) vérifie la relation, c'est-à-dire si x est frère ou sœur de y, si de plus le couple (y, z) la vérifie également (donc y est frère ou sœur de z), alors le couple (x, z) vérifie la relation.

La relation est dite transitive.

2. Soit, dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, la relation $\mathcal{R}$ « **être le double de** ».

Les couples (8, 4) et (4, 2) vérifient la relation considérée, mais le couple (8, 2) ne la vérifie pas.

La relation n'est pas transitive.

DÉFINITION

Une relation binaire, définie dans un ensemble, est transitive si, quels que soient les couples (x, y) et (y, z) vérifiant la relation, alors le couple (x, z) la vérifie également.

Si $\mathcal{R}$ est la relation considérée et (x, y) un couple :

$$\mathcal{R} \text{ transitive} \iff (x \mathcal{R} y \quad \text{et} \quad y \mathcal{R} z) \Longrightarrow x \mathcal{R} z$$

Ou, si $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ est le graphe de la relation :

$$\mathcal{R} \text{ transitive} \iff [(x, y) \in \mathcal{G}_{\mathcal{R}} \quad \text{et} \quad (y, z) \in \mathcal{G}_{\mathcal{R}}] \Longrightarrow (x, z) \in \mathcal{G}_{\mathcal{R}}$$

- Dans $\mathfrak{P}(E)$, **l'égalité** et **l'inclusion** sont des relations transitives.

4. RELATIONS BINAIRES ANTISYMÉTRIQUES

EXEMPLES

1. Soit, dans l'ensemble des entiers naturels, la relation $\leqslant$,

« **être inférieur ou égal à** ».

Si $x \leqslant 3$ et $3 \leqslant x$, alors $x = 3$.

Plus généralement, si $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$, alors $x = y$.

La relation $\leqslant$ est dite **antisymétrique.**

2. Soit, dans l'ensemble $\mathbb{N}^*$ des entiers naturels non nuls, la relation « **diviser** », que l'on note $|$.

Si $x \mid 6$ et $6 \mid x$ alors $x = 6$.

Plus généralement,

si $x \mid x$ et $y \mid x$ alors $x = y$.

La relation « **diviser** » est, dans $\mathbb{N}^*$, **antisymétrique.**



• **DÉFINITION**

Une relation binaire, définie dans un ensemble, est antisymétrique si, pour tout couple (x, y) et son transposé (y, x) vérifiant simultanément la relation, alors x est égal à y.

Donc : $\mathcal{R}$ *antisymétrique* $\iff$ $(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \implies (x = y)$

• Dans $\mathfrak{P}$(E), l'**égalité** et l'**inclusion** sont des relations antisymétriques. Remarquons que l'égalité est une relation à la fois symétrique et antisymétrique.

5. RELATIONS D'ÉQUIVALENCE

EXEMPLES

❶ Soit, entre les habitants de la Terre, ou simplement entre les élèves de votre classe, la relation binaire $\mathcal{R}$:

« être né la même année que ». Il est clair que la relation $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique, transitive.

On dit que $\mathcal{R}$ est **une relation d'équivalence** et que deux éléments vérifiant $\mathcal{R}$ sont **équivalents, modulo** $\mathcal{R}$.

A noter que cette relation permet une **partition** (2ᵉ leçon, § 8) en considérant les sous-ensembles formés d'éléments équivalents, c'est-à-dire nés la même année. Chacun des sous-ensembles obtenus s'appelle une **classe d'équivalence.**

❷ Soit, dans l'ensemble $\mathbb{Z}$, des entiers relatifs :

$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2...\}$

La relation **« avoir pour différence un multiple de 3 »** (0 est considéré comme multiple de 3).

• **La relation est réflexive :**

$\forall a, \quad a - a = 0$

• **La relation est symétrique :** si $(a - b)$ est multiple de 3, alors $(b - a)$ est multiple de 3.

• **La relation est transitive.**

La relation $\mathcal{R}$ considérée est dite **d'équivalence** et deux éléments qui la satisfont sont dits **équivalents, modulo** $\mathcal{R}$.



• **DÉFINITION**

Une relation binaire, définie dans un ensemble E, est une relation d'équivalence, si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence. Pour traduire qu'un couple **(x, y)** vérifie la relation $\mathcal{R}$, on remplace la notation générale **x $\mathcal{R}$ y** par :

$$x \equiv y \pmod{\mathcal{R}}$$

qui se lit « x *est équivalent à* y, *modulo* $\mathcal{R}$ ».

Donc, si *x*, *y*, *z* désignent des éléments quelconques d'un ensemble E, et si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E :

$$\begin{cases} \forall x \in E, \quad x \equiv x \pmod{\mathfrak{R}} \\ x \equiv y \pmod{\mathfrak{R}} \implies y \equiv x \pmod{\mathfrak{R}} \\ x \equiv y \pmod{\mathfrak{R}} \text{ et } y \equiv z \pmod{\mathfrak{R}} \implies x \equiv z \pmod{\mathfrak{R}} \end{cases}$$

- L'**égalité** est une relation d'équivalence, d'après ses règles de définition (leçon 1, § 1).
- La relation // « **être parallèle à** », est une relation d'équivalence dans l'ensemble $\mathfrak{D}$ des droites D du plan.
- La relation $\nearrow\nearrow$, « **être équipollent à** », est une relation d'équivalence dans l'ensemble des bipoints (A, B) de l'espace.

6. CLASSES D'ÉQUIVALENCE

EXEMPLES

① Soit la relation d'équivalence $\mathfrak{R}$, définie dans un ensemble E. d'êtres humains, « **...être né la même année que...** » (§ 5). Considérons les sous-ensembles dont les éléments sont équivalents entre eux. Chacun des sous-ensembles s'appelle une **classe d'équivalence.** Ici une classe « d'âge ».

② De même, la relation d'équivalence définie dans $\mathbb{Z}$, « **...avoir pour différence un multiple de 3...** » (cf. § 5) conduit à la **partition** de $\mathbb{Z}$ en trois classes C_1, C_2, C_3 d'équivalence :

$C_1 = \{..., -6, -3, 0, 3, 6, ...\}$
$C_2 = \{..., -5, -2, 1, 4, ...\}$
$C_3 = \{..., -4, -1, 2, ...\}$

• DÉFINITION



Soit $\mathfrak{R}$ une relation d'équivalence définie dans un ensemble E, non vide, et *a* un élément de E.

La classe de a, modulo $\mathfrak{R}$, est l'ensemble des éléments x de E équivalents à a, modulo $\mathfrak{R}$.

On la note Cl (a) ou $\dot{a}$ qui se lit « *classe* de *a* ».

Donc : $Cl(a) = \dot{a} = \{x ; a \,\mathfrak{R}\, x\}$

REMARQUE

Si a′ appartient à la classe de a, alors la classe de a′ et la classe de a sont identiques.

Soit $a' \in \dot{a}$. Si $x \in \dot{a}'$, alors $(a \mathfrak{R} a'$ et $a' \mathfrak{R} x) \Longrightarrow a \mathfrak{R} x$.

Donc : $\forall x \in \dot{a}'$; $x \in \dot{a}$, d'où $\dot{a}' \subset \dot{a}$.

On établit de même l'inclusion $\dot{a} \subset \dot{a}'$. D'où $\dot{a} = \dot{a}'$.

Une classe d'équivalence est donc déterminée par un quelconque de ses éléments, appelé **représentant** de la classe.

• CLASSES D'ÉQUIVALENCE ET PARTITION D'UN ENSEMBLE



THÉORÈME

Les classes d'équivalence relatives à une relation d'équivalence dans un ensemble, réalisent une partition de cet ensemble.

Rappelons que, par définition (2e leçon, § 9) :

Une partition d'un ensemble E est une famille de sous-ensembles non vides, deux à deux disjoints, et telle que la réunion de toutes ces parties soit égale à E lui-même.

Or :

— *Les classes d'équivalence sont des parties de* E *non vides.*

En effet, quelle que soit Cl (a), elle comprend l'élément a ($a \mathfrak{R} a$ d'après la réflexivité).

— *La réunion de toutes les classes est l'ensemble* E *lui-même.*

En effet, tout élément x de E appartient à une classe ($x \in$ Cl (x)).

— *Deux classes distinctes sont disjointes.*

En effet, si deux classes $\dot{a}$ et $\dot{b}$ ont une intersection non vide, il existe $x \in \dot{a} \cap \dot{b}$; alors, d'après la remarque ci-dessus, $\dot{a} = \dot{x} = \dot{b}$.

Ce qui démontre le théorème.

Réciproquement, *à toute partition d'un ensemble* E *correspond une relation binaire* $\mathfrak{R}$ *définie dans* E, *par* :

$x \mathfrak{R} y$ si x et y appartiennent à une même partie.

Or, $\mathfrak{R}$ est : **réflexive**

symétrique

transitive: si $x \mathfrak{R} y$ et $y \mathfrak{R} z$, alors $x \mathfrak{R} z$ résulte du fait que les parties sont disjointes.

La relation $\mathfrak{R}$ est donc une relation d'équivalence dans E.

La donnée d'une relation d'équivalence dans un ensemble E est donc logiquement équivalente à celle d'une partition de E.

● ENSEMBLE-QUOTIENT

DÉFINITION



L'ensemble des classes d'équivalence de E, modulo $\mathfrak{R}$, est appelé **ensemble-quotient** de E par $\mathfrak{R}$ et noté : E / $\mathfrak{R}$ ce qui se lit : « E *sur* $\mathfrak{R}$ ».

Ainsi les classes d'équivalence sont :

— d'une part, des *parties* de E ;
— d'autre part, les *éléments* de l'ensemble E/$\mathfrak{R}$.

EXEMPLES

❶ Les classes d'équivalence de la relation « // » sont les *directions* de droites ; l'ensemble-quotient : $\mathfrak{D}/\mathfrak{R}$ est l'ensemble des directions.

❷ Les classes d'équivalence de la relation « ↗↗ » dans l'ensemble des bipoints sont les *vecteurs* $\vec{v}$; l'ensemble-quotient est l'ensemble des vecteurs.

❸ Dans l'ensemble E des fractions la relation définie par $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Longleftrightarrow ab' = ba'$ est une relation d'équivalence. Chaque classe d'équivalence est un *nombre rationnel*. L'ensemble-quotient est l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels.

7. RELATIONS D'ORDRE

EXEMPLES

❶ Il s'agit ici de donner une définition mathématique des mots « **avant** » et « **après** » du langage courant. Or, si l'on dit « écrivez la lettre *a* **avant** la lettre *b* », on constate, qu'en général *a* sera écrit à gauche de *b* (schéma : *a*, *b*), mais qu'un Arabe écrira (*b*, *a*), un Chinois $\left(\frac{a}{b}\right)$.

Toutefois, malgré ces schémas différents, il sera possible de se comprendre puisque : si *a* est **avant** *b* et *b* **avant** *c*, pour tous, *a* sera **avant** *c*.

❷ Soit E l'ensemble des villes appartenant au bassin d'un fleuve donné. Considérons la relation binaire ↻ : « **être en aval de** ».

Si une ville *a* est en aval de *b*, et si *b* est en aval de *c*, alors *a* est en aval de *c* : la **relation ↻ est transitive**.

Si l'on pose, par convention, que toute ville est en aval d'elle-même, la relation ↻ est réflexive.
Enfin, si *a* est en aval de *b* et *b* en aval de *a* alors $a = b$.

Dans ces conditions,on dit que la relation ↻ est une **relation d'ordre sur E.**

● DÉFINITION



Une relation binaire, définie dans un ensemble E, est une relation d'ordre si elle est réflexive, transitive et antisymétrique.

Une relation d'ordre se note souvent ↻ ou $\prec$ ce qui se lit : « *précède* » ou « *est avant* ».

Pour traduire qu'un couple (x, y) vérifie la relation d'ordre $\prec$ on note donc :

$x \mathcal{O} y$ ou $x \prec y$ ce qui se lit « x *précède* y » ou « x *est avant* y » ou « x est *antérieur* à y ».

La relation réciproque se lit « y **suit** x » ou « y **est après** x ».

Donc si x, y, z, désignent des éléments d'un ensemble E, et si $\prec$ est une relation d'ordre définie dans E :

$$\begin{cases} \forall x \in E, \quad x \prec x \\ (x \prec y \quad \text{et} \quad y \prec x) \implies x = y \\ x \prec y \quad \text{et} \quad y \prec z \implies x \prec z \end{cases}$$

- **L'inclusion ensembliste** est, dans $\mathfrak{P}(E)$, une **relation d'ordre.**
- La relation $\leqslant$, « **être au plus égal à...** » est une relation d'ordre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels...
- La relation $|$, « *diviser* », est une relation d'ordre dans l'ensemble $\mathbb{N}^*$ (entiers naturels non nuls).

• ORDRE PARTIEL. ORDRE TOTAL

— Deux éléments x et y d'un ensemble E muni d'une relation d'ordre (notée $\prec$) sont dit *comparables* par la relation $\prec$ si l'une, au moins, des relations $y \prec x$ ou $x \prec y$ est vraie.

— Lorsque tous les éléments de l'ensemble E sont deux à deux comparables, l'ordre est dit **total** ; sinon, il est dit **partiel.** Dans le premier cas, l'ensemble E est dit **totalement ordonné** ; on dit aussi que E constitue une *chaîne* pour la relation d'ordre.

Dans le deuxième cas, l'ensemble est dit *ordonné* (sans plus de précision).

Par exemple, l'**inclusion** est une relation d'ordre **partiel** dans $\mathfrak{P}(E)$.
La relation $\leqslant$ est **d'ordre total** dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
Nous complèterons ces notions dans la 8e leçon.



EXERCICES

4-1 Soit l'ensemble $E = \{1, 2, 5, 8\}$.

1° Quels est l'ensemble $E \times E$?

2° Quel est le graphe $\mathcal{G}$ défini par la relation : « **le premier élément du couple est strictement plus petit que le second** » ?

4-2 Soit E l'ensemble des élèves de votre lycée. On indique que deux élèves *a* et *b* appartiennent « **à la même classe** » en disant : « *a* **est condisciple de** *b* ».

1° Étudier du point de vue réflexivité, symétrie, transitivité, la relation binaire $\mathcal{R}$ ci-dessus. Conclusion ?

2° Quel est l'ensemble-quotient $E/\mathcal{R}$?

4-3 Soit l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

1° Montrer que la relation binaire : « *x* **divise exactement** *y* » (que l'on notera $x \prec y$) est une relation d'ordre.

Exemples : 3 divise 12 donc $3 \prec 12$; 5 ne divise pas 9, donc le couple (5, 9) ne satisfait pas la relation.

2° Peut-on étendre ce qui précède à l'ensemble des entiers naturels (zéro exclu)

$$N^* = \{1, 2, 3, ...\} ?$$

4-4 Soit E un ensemble d'enfants jouant au même jeu. Étudier du point de vue réflexivité, symétrie, transitivité, les relations binaires suivantes. S'il s'agit de relations d'équivalence, on précisera quelles sont les classes d'équivalence.

1° Relation $\mathcal{R}_1$: « **est coéquipier de** *b* ».

2° Relation $\mathcal{R}_2$: « *x* **est adversaire de** *y* ».

4-5 Soit E l'ensemble des élèves des classes de Terminale de votre lycée n'étudiant qu'une langue étrangère. Que dire de la relation binaire : « **l'élève** *x* **étudie la même langue étrangère que l'élève** *y* » ?

4-6 Soit E l'ensemble des élèves de votre classe. Lors d'une composition, le classement définit la relation binaire : « **l'élève** *a* **est ex-æquo avec** *b* ».

Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. Quelles sont les classes d'équivalence ?

4-7 Soit E un ensemble d'enfants participant à une séance de mensuration.

Étudier du point de vue réflexivité, symétrie, transitivité les relations suivantes.

Préciser s'il s'agit de relations d'équivalence ou d'ordre.

1° $\mathcal{R}_1$: « **l'élève** *a* **a la même taille que l'élève** *b* ».

2° $\mathcal{R}_2$: « **l'élève** *a* **est plus petit que l'élève** *b* ».

3° $\mathcal{R}_3$: « **l'élève** *a* **mesure 5 cm de plus que l'élève** *b* ».

4-8 On considère l'ensemble $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ avec $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$. Deux couples (a, b) et (a', b'), éléments de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, sont dits liés par la relation $\mathcal{R}$ si $ab' = ba'$.

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Donner des éléments de la classe de l'élément (4, 5).

4-9 On considère l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ avec $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.

Deux éléments (a, b) et (a', b') de cet ensemble vérifient la relation $\mathcal{R}$ si $a + b' = b + a'$.

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Définir les classes d'équivalence des éléments (3, 2) ; (5, 5) ; (1, 3).

4-10 Dans l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2...\}$, on considère la relation binaire $\mathcal{R}$: « **la différence** $(x - y)$ **est, ou nulle, ou multiple de 5** ». Démontrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. Quelles sont les classes d'équivalence ?

4-11 Dans le même ensemble, mêmes questions pour la relation binaire : « **la différence** $(x - y)$ **est, ou nulle, ou multiple de 8** ».

4-12 Dans l'ensemble $\mathbb{Z}^*$ des entiers relatifs, zéro exclu, $\mathbb{Z}^* = \{ , -3, -1, 1, 2, ...\}$ on définit la relation $|$, « *diviser* », par : $b|a \iff \exists\ x \in \mathbb{Z}^*$ tel que $a = bx$.

La relation $|$ est-elle une relation d'ordre ?

4-13 Dans $\mathbb{R}^*$, ensemble des nombres réels non nuls, on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par : $x \mathcal{R} y \iff x \cdot y > 0$.

Établir que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence ; quelles sont les classes d'équivalence ?

4-14 Dans $\mathbb{R}$, ensemble des nombres réels, la relation $\mathbb{R}$ telle que :

$$x \mathcal{R} y \iff x^2 - y^2 = x - y,$$

est-elle une relation d'équivalence ? Si oui, quelle est la classe de 2 ? celle de a ? Représenter le graphe $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$.

4-15 E étant un ensemble de personnes, on considère les relations binaires :

$\mathcal{R}$: « ... est père de ... »
$\mathcal{S}$: « ... est mère de ... »
$\mathcal{T}$: « ... est frère de ... »
$\mathcal{U}$: « ... est sœur de ... »

Exprimer les relations : $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$, $\mathcal{R} \circ \mathcal{T}$, $\mathcal{T} \circ \mathcal{R}$, etc...

4-16 Définir la négation de :

$\mathcal{R}$ est réflexive ; $\mathcal{R}$ est symétrique ; $\mathcal{R}$ est transitive.

4-17 Une relation binaire $\mathcal{R}$ est symétrique, et aucune élément a de E ne vérifie $a \mathcal{R} a$. Le graphe $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ étant non vide, $\mathcal{R}$ peut-elle être transitive ?

4-18 Une relation binaire $\mathcal{R}$ est circulaire si $(x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z) \Longrightarrow z \mathcal{R} x$.

1° Une relation d'équivalence est-elle circulaire ?

2° Une relation binaire réflexive et circulaire est-elle une relation d'équivalence ?

4-19 Dans un tableau carré sont disposés des éléments a d'un ensemble totalement ordonné par une relation $\prec$.

Soit a'_i le plus grand élément de la ligne i et a' le plus petit élément de l'ensemble des a'_i.

Soit a''^j le plus petit élément de la colonne j et a'' le plus grand élément de l'ensemble des a''^j.

Comparer a' et a''.

4-20 Soit A une partie de E.

Dans $\mathcal{P}(E)$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$X \mathcal{R} Y \Longleftrightarrow (A \cap X = A \cap Y).$$

1° Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2° Δ représentant la différence symétrique, établir que :

$$X \equiv Y \ (\text{mod. } \mathcal{R}) \Longleftrightarrow (X \Delta Y) \cap A = \emptyset.$$

3° Quelle est la relation $\mathcal{R}$ si $A = \emptyset$? si $A = E$?

INDICATIONS

4-1 1° $E \times E = \{(1,1), (1,2), (1,5), (1,8), (2,1), (2,2), (2,5), (2,8), (5,1), (5,2), (5,5), (5,8) (8,1), (8,2), (8,5), (8,8)\}$

2° $\mathcal{G} = \{(1,2), (1,5), (1,8), (2,5), (2,8), (5,8)\}$

4-5 Relation d'équivalence.

4-8 $(\dot{\widehat{4,5}}) = \{(4k, 5k)$ avec k entier naturel non nul $\}$.

4-9 $(\dot{3,2}) = \{1 + u, u)$ avec u entier naturel $\}$

4-10 Cf. § 7, exemple 2

4-12 a divise $-a$, $-a$ divise a et $a \neq -a$, alors...

4-14 La classe de a est $\{a, 1 - a\}$.

4-16 $\mathcal{R}$ non réflexive $\Longleftrightarrow (\exists\, x \in E, \ldots)$.

4-17 $\mathcal{G}_{\mathcal{R}} \neq \emptyset \Longrightarrow (\exists\, x \in E, \exists\, y \in E, x \mathcal{R} y)$
$\mathcal{R}$ étant symétrique, alors $y \mathcal{R} x$ et si $\mathcal{R}$ était transitive alors $(x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x)$ implique : $(\exists\, x, x \mathcal{R} x)$...

4-18 Si $\mathcal{R}$ est réflexive et circulaire, soient x, y, et z tels que $x \mathcal{R} y$ *et* $y \mathcal{R} z$.
Alors $(x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} y) \Longrightarrow y \mathcal{R} x$; et $\mathcal{R}$ est symétrique.
Établir alors que $\mathcal{R}$ est transitive.

4-19 a' appartient à une ligne L dont il est l'élément a'_i.
a'' appartient à une colonne C dont il est l'élément a''_j.
Soit $\{a\} = L \cap C$, ...



FONCTIONS

5

● *Dans les leçons précédentes nous avons étudié des relations binaires entre éléments de deux ensembles* E *et* F, *l'ensemble* F *n'étant pas nécessairement distinct de* E.

● *Devant la multitude des types de relations binaires possibles, il est naturel de commencer par l'étude des plus simples. Quelles sont donc les relations binaires les plus simples? Sans contestation possible, celles pour lesquelles à chaque origine de couple correspond, au plus, une extrémité : ce sont les* **relations fonctionnelles** *ou* **fonctions.**

Or, justement, la nature, la vie courante, offrent de nombreux exemples de relations fonctionnelles, de fonctions. Ne dit-on pas couramment « l'usure des pneus d'une voiture est **fonction** *de la vitesse à laquelle roule cette voiture », « la longueur d'une barre de métal est* **fonction** *de la température »? Considérons, de même, dans l'ensemble des humains actuellement vivants, les deux relations :* **« avoir pour mère »** *et* **« avoir pour frère ».** *Puisqu'à tout individu correspond une mère (si elle est vivante), la première relation est fonctionnelle ; au contraire, la seconde n'est pas une fonction puisqu'un individu peut avoir plusieurs frères.*

● *Dans ce chapitre, il s'agit donc d'abord de distinguer les fonctions et les relations binaires. Pour cela, il suffira de chercher le* **nombre des extrémités des couples ayant une origine donnée.** *Il s'agira ensuite, ayant reconnu les relations fonctionnelles, d'étudier leurs propriétés. Mais comme l'a dit excellemment le philosophe et mathématicien Bertrand Russel :* **« l'idée de fonction est si importante et elle a été si souvent considérée exclusivement comme relation entre nombres qu'il est bon de mettre dans notre esprit de nombreux exemples de fonctions non numériques ».**

C'est pourquoi cette étude sera effectuée en toute généralité. Ce n'est qu'ultérieurement (2e fascicule), alors que la notion de fonctionprésentée dans cette leçon aura été dégagée, que nous étudierons le cas particulier, et cependant très important, des fonctions numériques.

1. SECTION (OU COUPE) D'UN GRAPHE

EXEMPLES

❶ Considérons le graphe $\mathcal{G}$, ensemble des couples (0, 1), (0, 3), (0, 5), (1, 3), (4, 1), (1, 1), (4, 4). Les extrémités 1, 3, 5 (éléments de $pr_2\,\mathcal{G}$ des couples ci-dessus sont en relation avec l'élément 0 de $pr_1\,\mathcal{G}$.

On dit que l'ensemble $\{1, 3, 5\}$ noté $\mathcal{G}(0)$, est **l'image directe** de l'élément 0. De même, les ensembles $\{1, 3\}$ et $\{4, 1\}$ sont respectivement les images directes du graphe considéré $\mathcal{G}$ par les éléments 1 et 4.

Quant à l'ensemble des *couples* $\{(0, 1), (0, 3), (0, 5)\}$ il s'appelle la **section** (ou **coupe**) **directe** du graphe par l'élément 0. Autrement dit, l'image directe d'un élément est la première projection de la section directe du graphe par cet élément.

Inversement, soit l'élément 3 de $pr_2\,\mathcal{G}$. Cet élément est en relation avec les éléments 0 et 1 de $pr_1\,\mathcal{G}$. On dit que l'ensemble $\{0, 1\}$, noté $\overset{-1}{\mathcal{G}}(3)$, est l'**image réciproque** de l'élément 3.

❷ Soit E un ensemble d'hommes dont certains ont été ministres.

Soit $\mathcal{G}$ le graphe associé à la relation binaire $\mathcal{R}$ ainsi définie :

« *x* a été ministre sous la présidence de *y* ».

On écrira alors $x \mathcal{R} y$ ou $(x, y) \in \mathcal{G}$.

D'après ce qui précède (3[e] leçon), la notation $pr_2\,\mathcal{G}$ désigne l'ensemble des présidents (ou Premiers ministres).

Soit *a* un ministre ($\in pr_1\,\mathcal{G}$). L'ensemble noté $\mathcal{G}(a)$, est l'ensemble des présidents ayant eu *a* pour ministre : c'est l'image directe du graphe $\mathcal{G}$ par l'élément *a*.

De même, soit *b* un président ($\in pr_2\mathcal{G}$).

L'ensemble, noté $\overset{-1}{\mathcal{G}}(b)$, est formé des ministres ayant eu *b* pour président. C'est l'**image réciproque** de *b* par $\mathcal{G}$

• DÉFINITIONS

Étant donné un graphe $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ (d'une relation binaire $\mathcal{R}$ d'un ensemble E vers un ensemble F), on appelle **image** d'un élément *a* appartenant à $pr_1\mathcal{G}$ l'ensemble, noté $\mathcal{R}(a)$, de tous les éléments $y (\in F)$, tels que le couple (a, y) soit élément de $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ (ou tels que $a \mathcal{R} y$).

De même :

Étant donné le graphe $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ d'une relation binaire $\mathcal{R}$, d'un ensemble E vers un ensemble F, *la* **coupe** (*ou* **section) directe** *du graphe par l'élément* a (*de* E) *est l'ensemble de tous les couples* (a, y) *éléments de* $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ (*ou tels que* a $\mathcal{R}$ y).

Dans les mêmes conditions, si *b* est un élément de $pr_2\mathcal{G}$, l'ensemble, noté $\overset{-1}{\mathcal{G}}(b)$, des éléments $x (\in E)$ tels que le couple (x, b) soit élément de $\mathcal{G}$ (ou tels que $x \mathcal{R} b$) est l'image réciproque du graphe $\mathcal{G}\mathcal{R}$ par l'élément *b*.

Ou bien

la coupe (*ou* **section) réciproque** *du graphe par l'élément* b (*de* F) *est l'ensemble, de tous les couples* (x, b) *éléments de* $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ (*ou tels que* x $\mathcal{R}$ b).

2. FONCTIONS (OU APPLICATIONS)

EXEMPLES

❶ Soit A l'ensemble des élèves de votre classe et B un ensemble de villes comprenant les lieux de naissance des élèves.

La relation binaire « *a* (∈ A) **est né à** *b* (∈ B) » possède la propriété simple suivante :

tout élément *a* est en relation avec **un seul** élément *b*, ce qui signifie que l'**image directe** $\mathcal{G}(a)$ **du graphe correspondant par tout élément** *a* **est réduite à un seul élément.**

Une telle relation s'appelle une **application de A vers B.**

Noter qu'une section réciproque ne possède pas, en général, la même propriété.

❷ Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3...\}$.

La relation binaire « *x*(∈ $\mathbb{N}$) **a pour moitié** *y* (∈ $\mathbb{N}$) » possède la propriété suivante :

un élément *x* est en relation avec, au plus, **un seul** élément *y*, ce qui signifie que l'image directe $\mathcal{G}(x)$ du graphe par tout élément *x* est soit vide, soit réduite à un seul élément.

Une telle relation (ou un tel graphe) sera appelée **fonction de** $\mathbb{N}$ **dans** $\mathbb{N}$.

On dit aussi que la fonction est **définie dans** $\mathbb{N}$ **et à valeurs dans** $\mathbb{N}$.

● DÉFINITION



Une relation binaire $\mathcal{R}$ d'un ensemble E vers un ensemble F est dite fonctionnelle si, pour tout x de E, l'image $\mathcal{R}(x)$ (ou la coupe du graphe $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$), comprend au plus un élément.

Donc pour *x* donné, de E, il existe au plus un *y* de F tel que : $x \mathcal{R} y$.

Une telle relation est appelée *fonction définie dans* E *et à valeurs dans* F.

On dit aussi que l'ensemble E est l'*ensemble de départ* (ou *ensemble source*) et F l'*ensemble d'arrivée* (ou *ensemble but*).

Si **f** désigne une fonction de E dans F et si *y* est l'élément (de F) associé à l'élément *x* (de E), on écrit « **y = f(x)** » ou, sous forme symbolique :

$x \rightarrow f(x)$ ou $x \xrightarrow{f} y$ ou $E \rightarrow F$

L'élément *f*(*x*) s'appelle **image** de *x* par *f* (ou, parfois, la *valeur* de *f* au « point » *x*).

REMARQUES

❶ Pour qu'une fonction soit définie, il faut donc préciser l'ensemble E (de départ), l'ensemble F (d'arrivée) et la relation liant tout élément *x* (∈ E) à l'élément associé *y* (∈ F).

❷ Il est recommandé d'éviter l'abus de langage qui consiste à dire la « **fonction** *f*(*x*) ». En effet, *f*(*x*) n'est pas la fonction, **mais l'élément unique de F associé à l'élément** *x* **de E, par la fonction** *f*. Quant à la fonction *f*, c'est un graphe (soumis aux conditions indiquées), donc **un sous-ensemble du produit cartésien E × F.**

3 L'ensemble E′ (avec $E' \subset E$) des éléments x pour lesquels il existe un y vérifiant $y = f(x)$ est le **domaine de définition** de la fonction f.
L'ensemble F′ (avec $F' \subset F$) défini par $F' = \{y\,;\, y = f(x),\, x \in E'\}$ est l'**ensemble des images** (ou, parfois, ensemble des valeurs prises par f).



• APPLICATIONS

Si f(x) *existe pour tout élément* x *de l'ensemble* E, *la fonction* f *est appelée* **application** *de* E *dans* F.

Une **application** est donc une fonction définie **sur** E ; ceci signifie que les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1° Toute image (ou coupe) directe $\mathcal{R}(x)$ du graphe $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ par un élément $x (\in E)$ contient un élément unique.

2° $E = pr_1\mathcal{G}$, c'est dire que tout élément de E est origine d'un couple.

Une fonction de E vers F dont le domaine de définition E′ est inclus dans E est donc *une application de* E′ *dans* F. C'est pour cela que nous n'envisagerons, en général, que des applications.

• ÉGALITÉ DE DEUX FONCTIONS (OU APPLICATIONS)

L'égalité de deux fonctions f et g est *définie par* :

$f = g \iff$ *f et g ont même domaine de définition* E, *f et g ont même ensemble* F de valeurs, c'est-à-dire : $\forall x \in E,\quad f(x) = g(x)$.

• RESTRICTION D'UNE FONCTION

Soit f une fonction de E vers F, E_1 une partie de E.
On appelle **restriction de f à E_1**, la fonction g de E_1 vers F définie par :

$$\forall x \in E_1, \quad g(x) = f(x)$$

• IMAGE D'UNE PARTIE

L'image d'une partie A de E est l'ensemble, noté $f(A)$, des éléments y de F tels que : $[\exists x \in A,\, f(x) = y]$. En particulier, l'ensemble F′ des valeurs prises est l'image du domaine de définition E′ : $F' = f(E')$.

Remarquons que $f(\emptyset) = \emptyset$
et que si $A = \{x\}$, $f(A)$ a, au plus, un élément.

L'image réciproque d'une partie B de F est l'ensemble, noté $\overset{-1}{f}(B)$, des éléments x de E tels que : $f(x) \in B$.

Si $B = \{y\}$, on note $\overset{-1}{f}(\{y\})$ ou, plus simplement, $\overset{-1}{f}(y)$. Remarquons que $\overset{-1}{f}(y)$ peut comporter plusieurs éléments.

3. REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DES FONCTIONS ET DES APPLICATIONS

Puisque toute fonction (ou toute application) est une relation binaire particulière, il est également possible de la représenter de diverses façons (3e leçon, § 3). Comme pour les graphes des relations binaires, les schémas ou illustrations sont essentiellement de quatre types :

● **Tableau à simple entrée.** Par exemple : ensemble de départ en ligne, ensemble d'arrivée en colonne. Ce qui caractérise alors une application est le fait que, **dans chaque colonne, il y a une « marque » unique.**
On remarquera qu'en général, il n'en est pas de même dans une ligne.

Nous avons représenté ainsi (fig. 1), l'application *f* « **... a pour carré...** » de l'ensemble E = {— 3, — 2, — 1, 0, 1, 2} vers l'ensemble F = {0, 1, 4, 5, 9}.

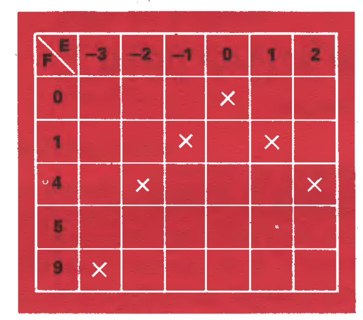


Fig. 1.

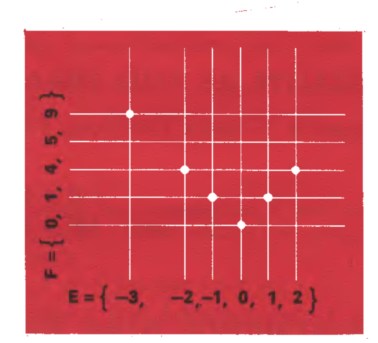


Fig. 2.

● **Diagramme cartésien.** Il s'agit d'un quadrillage formé de droites illustrant chacun des éléments des ensembles considérés. En général, les lignes « verticales » correspondent à l'ensemble de départ. Dans le cas des applications, il y a un point unique sur chaque « verticale ». Dans le cas des fonctions, il y a *au plus* un point sur chaque « verticale ». La figure 2 représente la même fonction *f* que la figure 1.

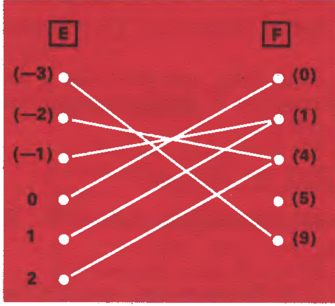


Fig. 3.

● **Les éléments de chacun des ensembles sont figurés par des points** et l'on joint, par un segment de droite, chaque élément de l'ensemble de départ à son image. Cette représentation est dite **duale** de celle qui précède. S'il s'agit d'une application, *de chaque point de l'ensemble source part un segment de droite unique* (fig. 3).

● **Diagramme sagittal de Venn, ou d'Euler.** Les ensembles de départ et d'arrivée sont représentés par des « nuages de points » entourés d'une ligne. On joint alors *chaque point à son image par une flèche* (fig. 4). Chacun des points de l'ensemble de départ est alors l'origine d'au plus une flèche (fonction), d'exactement une flèche (application).

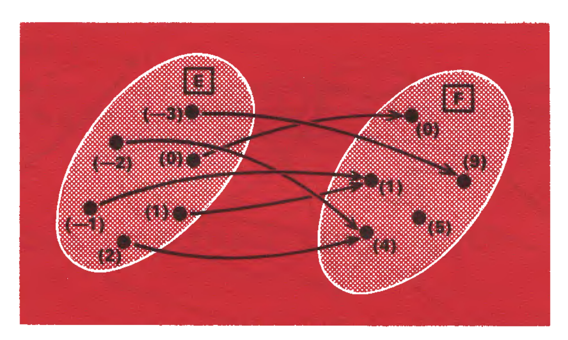


Fig. 4.

Les figures 1, 2, 3, 4 représentent graphiquement l'application f : « avoir pour carré », de l'ensemble E vers l'ensemble F, ainsi défini :

$$\begin{cases} \text{ensemble de départ } E = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\} \\ \text{ensemble d'arrivée } F = \{0, 1, 4, 5, 9.\} \end{cases}$$

4. COMPOSITION DE DEUX APPLICATIONS

EXEMPLE

Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Soit f l'**application** de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui à tout $x(\in \mathbb{N})$ fait correspondre l'entier z, **suivant de** x, donc $z = f(x) = x + 1$. Soit g l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui, à tout entier u, fait correspondre l'entier v « **carré de** » u. On écrit : $v = g(u) = u^2$.

Puisqu'à tout $x(\in \mathbb{N})$ correspond, par f, un entier z et à tout $z(\in \mathbb{N})$ correspond, par g, un élément de $\mathbb{N}$ (soit y), **il existe une application, de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, qui, à tout** x, **associe l'élément** y. Cette application s'appelle **la composée de f par g.**

Elle est notée $g \circ f$, car : $\forall x \in \mathbb{N}$, de $z = f(x)$ et $y = g(z)$, il vient : $y = g[f(x)]$.

Sous forme symbolique, on écrira : $x \overset{g \circ f}{\longrightarrow} x^2 + 2x + 1 = y$.

Nous avons illustré (fig. 5), une partie de cette situation :

— application f : flèches en traits pointillés
— application g : flèches en traits tiretés

— application $g \circ f$: flèches en traits pleins.

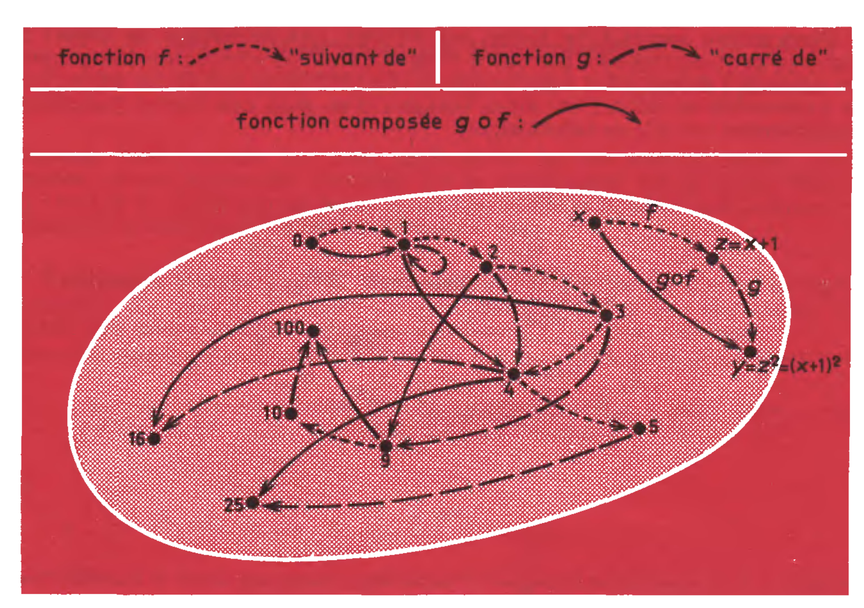


Fig. 5.

2

● DÉFINITION

Soit f une application de E vers F, et g une application de F vers G.
Quel que soit x appartenant à E, l'image, par f, de x est $y = f(x)$ appartenant à F ; et l'image, par g, de y est $z = g(y)$ appartenant à G (fig. 6).
L'application composée de f et g est l'application h de E dans G, définie par :

$$\forall\ x \in E, \qquad x \overset{h}{\longrightarrow} z = h(x) = g[f(x)]$$

Conformément à la composition des relations binaires (3e leçon, § 5), on note : $h = g \circ f$ et on lit « g *rond* f ».
On définit de même la *fonction composée* de deux fonctions f et g. La fonction $g \circ f$ est définie dans le domaine E″, ensemble des x tels que $f(x)$ appartienne, dans F, au domaine de définition de g.

● THÉORÈME

Quelles que soient les applications f de E dans F, g de F dans G, et h de G dans h :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Soit un élément x quelconque de E.

Posons : $y = f(x), \quad z = g(y), \quad t = h(z).$

Alors $\begin{cases} h \circ (g \circ f)(x) = h(z) = t, \\ (h \circ g) \circ f(x) = (h \circ g)(y) = h(z) = t. \end{cases}$

Le théorème ci-dessus est vrai pour des fonctions, à condition de considérer le domaine dans lequel les composées sont définies.

REMARQUE

Dans l'ensemble $\mathfrak{F}$ des fonctions de E vers E, le théorème ci-dessus se traduit par : *Dans $\mathfrak{F}$, la loi « $\circ$ » (de composition des fonctions) est associative* (cf. 6e leçon).

5. QUALITÉS D'UNE APPLICATION

Puisque, dans une application, tout élément de l'ensemble de départ a une image unique, la classification des applications d'après leurs propriétés résultera de *la façon dont les éléments de l'ensemble d'arrivée sont, ou ne sont pas, des images.*

1° DÉFINITIONS

En désignant par f une application d'un ensemble E dans un ensemble F, ceci conduit aux définitions suivantes :

- f est **surjective,** ou est une **surjection,** si :

$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad \text{tel que} \quad f(x) = y$$



C'est dire que $f(E) = F$ ou que *tout élément de* F *est image, par* f, *d'au moins un élément de* E.
On dit alors que **f** applique **E** *sur* **F.**

EXEMPLE

L'application f de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels dans $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ définie par $x \mapsto f(x) = x + 1$ (suivant de x) est **surjective.**

CONTRE-EXEMPLE

L'application de $\mathbb{Z}$ (ensemble des entiers relatifs) dans $\mathbb{Z}$ qui, à tout x, associe son carré, n'est pas surjective.

On remarquera que, si f est une fonction non surjective de E dans F, il est possible de définir une **nouvelle fonction** f^*, surjective, en conservant l'ensemble E de départ et en prenant pour ensemble d'arrivée l'ensemble F' des éléments de F effectivement images.



• *f* est **injective,** ou est une **injection,** si :

$$x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$$

ou, ce qui est équivalent, si :

$$f(x) = f(x') \implies x = x'$$

Cela signifie que tout *élément image* est image d'un seul élément de E.

EXEMPLE

Ensembles de départ et d'arrivée : ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. La fonction *f* « ... a pour carré ... » est injective.

CONTRE-EXEMPLE

Ensemble de départ : ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. Ensemble d'arrivée : $\mathbb{N}$. La fonction *g* « ... a pour carré ... » n'est pas injective. En effet les images de -2. et $+2$, par exemple, sont égales.



• *f* est **bijective,** ou est une **bijection,** si elle est *injective* et *surjective.*

Toute bijection d'un ensemble sur lui-même est appelée **substitution** (ou parfois **permutation** de l'ensemble).

EXEMPLES

❶ L'*application identique* 1_E d'un ensemble E sur lui-même est une permutation.

❷ L'application *f* de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^*$ définie par « $f(x)$ est le suivant de x » est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^*$.

CONTRE-EXEMPLE

$\mathcal{R}$ étant une relation d'équivalence dans un ensemble E, l'application *f* de E dans l'ensemble-quotient $E/\mathcal{R}$ définie par : $x \overset{f}{\longrightarrow} f(x) = \mathcal{C}l(x)$ (ou $\dot{x}$) est surjective, mais non injective en général. Elle est appelée surjection canonique.

2° PROPRIÉTÉS

P. La composée de deux injections est une injection.

En effet, si *f* et *g* sont injectives cela équivaut à :

$$\begin{cases} x \neq x' \implies f(x) \neq f(x') \\ y \neq y' \implies g(y) \neq g(y'). \end{cases}$$

D'où :

$$x \neq x' \implies g \circ f(x) \neq g \circ f(x')$$

P_2 La composée de deux surjections est une surjection.
En effet, si $f(E) = F$ et $g(F) = G$ alors $g \circ f(E) = g[f(E)] = G$.
Des propriétés P_1 et P_2 résulte le théorème :



• THÉORÈME

La composée de deux bijections est une bijection.

6. APPLICATION RÉCIPROQUE D'UNE BIJECTION



• THÉORÈME

Si f est une application bijective de E sur F, il existe une application réciproque de f, notée f^{-1}, qui est une bijection de F sur E.



— *Existence de* f^{-1}. Soit f une bijection de E sur F.
Alors : $\forall\, y \in F, \exists\, x \in E ;\quad f(x) = y,$ puisque f est surjective.
De plus, cet élément x est unique, puisque, f étant injective :

$$x \neq x' \Longrightarrow y \neq f(x').$$

Ainsi la relation binaire $\overset{-1}{f}$, réciproque de f, est une relation fonctionnelle ; elle est appelée application réciproque de f et notée f^{-1}.
On note : $f^{-1} : F \to E$; ou : $f^{-1} : \; y \mapsto x = f^{-1}(y)$.
L'application réciproque f^{-1} de f est définie par :

$$x = f^{-1}(y) \iff y = f(x)$$

— *De plus,* f^{-1} *est une bijection.*
Elle est surjective car : $\forall\, x \in E,\quad f(x) = y$ existe ; alors $f^{-1}(y) = x$.
Elle est injective car :

$$(x = x') \Longrightarrow (f(x) = f(x')) \quad \text{(puisque } f \text{ est définie)}$$

c'est-à-dire : $f^{-1}(y) = f^{-1}(y') \Longrightarrow y = y'$.

EXEMPLES

① Si la fonction f est l'*attribution*, à chaque automobile, d'un numéro d'immatriculation, la fonction réciproque est l'*identification* d'un véhicule à partir du numéro d'immatriculation.

② Soit f la fonction « *prendre l'inverse de* », qui, à tout nombre réel x, différent de zéro, associe son inverse y : $x \overset{f}{\mapsto} y = \dfrac{1}{x}$.

Or, $x = \dfrac{1}{y}$; donc *la fonction réciproque de* f, qui applique y sur $x = \dfrac{1}{y}$ *est la fonction* f *elle-même* : $f^{-1} = f$.

7. ÉQUATIONS

• DÉFINITION



Soit f et g deux applications (ou deux fonctions) d'un ensemble E vers un ensemble F.
La définition, *en compréhension*, de l'ensemble S des éléments de E ayant, par f, une image donnée a dans F s'appelle une **équation.**

On la note : $f(x) \overset{?}{=} a$

La définition, *en compréhension*, de l'ensemble S des éléments de E dont les images dans F, par f et g sont identiques, s'appelle également une *équation*.

On la note : $f(x) \overset{?}{=} g(x)$

L'élément x (de E) est appelé l'*inconnue* de l'équation.
Tout élément α (de E) tel que $f(\alpha) = a$ [ou $f(\alpha) = g(\alpha)$] est une *solution* (ou *racine*) de l'équation.
L'ensemble S des éléments α est l'**ensemble des solutions** (fig. 6).
Déterminer l'ensemble S des solutions *en extension s'appelle résoudre* l'équation.

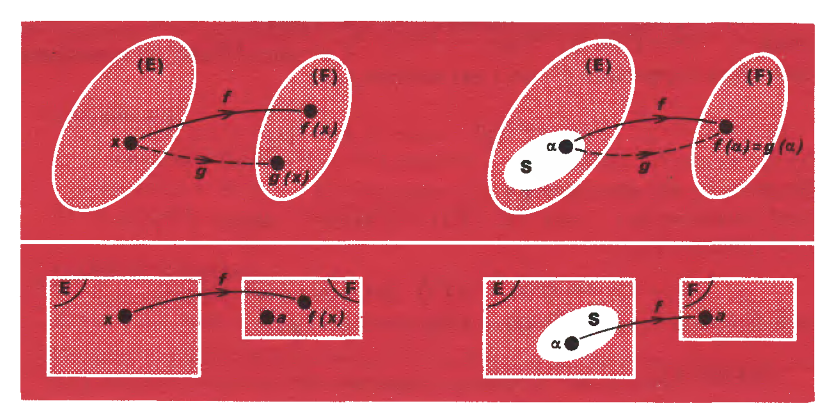


Fig. 6.

• REMARQUES

❶ En général on ne marque pas le point d'interrogation sur le signe =, et l'équation $f(x) \overset{?}{=} g(x)$ est notée $f(x) = g(x)$.

❷ Une équation n'est pas définie par la seule donnée de $f(x) \overset{?}{=} a$ ou $f(x) \overset{?}{=} g(x)$.
Il est nécessaire de préciser l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée.

Par exemple, dire : « résoudre l'équation $4x^2 = 9$ » n'a pas de signification. Si l'on précise que $x \in \mathbb{N}$, le problème posé a une signification et l'on montre que $S = \emptyset$.

Si x est rationnel positif, on montre que $S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$.

Si x est rationnel, alors $S = \left\{ \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\}$.

Ainsi dans ce cas, suivant l'ensemble de départ, l'équation à *zéro*, *une* ou *deux* solutions.

3° L'ensemble S des solutions de l'équation $f(x) \doteq a$ est *l'image réciproque de* a *par* f, ou la première projection de la section réciproque du graphe de f par l'élément a (§ 1).

Donc $S = \overset{-1}{f}(a)$.

8. SUITES

EXEMPLES

① Soit $E = \{1, 2, 3, \ldots, 95\}$ et $F =$ l'ensemble des départements français. Soit f l'application de E vers F qui, à chaque élément de E associe l'élément de F selon le code en usage. Ainsi :

$$13 \xrightarrow{f} \text{Bouches-du-Rhône}, \quad 37 \xrightarrow{f} \text{Indre-et-Loire}, \quad 69 \xleftarrow{f} \text{Rhône}.$$

L'application f s'appelle une **suite.**

② Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Soit D l'ensemble des nombres décimaux. Soit f l'application de $\mathbb{N}$ vers D qui, à $n \in \mathbb{N}$ fait correspondre $f(n) = \frac{1}{10^n}$.

On dit que f est une **suite.**

● DÉFINITION

On appelle **suite** *toute application d'une partie de l'ensemble* $\mathbb{N}$ *des entiers naturels, vers un ensemble* F.

Par abus de langage, on dit que la suite est définie dans F.

Si f est cette application, l'image de $n \in \mathbb{N}$ est notée u_n, au lieu de $f(n)$. On dit aussi que u_n est le *terme de rang n* (ou d'indice n).





EXERCICES

5-1 Soit f l'application, de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$, qui a tout entier naturel associe le nombre de ses dizaines.

1° Quelles sont les qualités de f ?

2° Représenter graphiquement la restriction f^* de f à l'ensemble $0 \leqslant x \leqslant 120$

5-2 Soit $E = \{a, b, c\}$.

1° Définir toutes les applications de E vers E.

2° Montrer qu'il y a six bijections (dont 1_E) de E sur E. Définir la composée de deux quelconques de ces bijections.

5-3 Soit $E = \{0, 1\}$. A tout couple $(x, y) \in E^2$, on associe le nombre $x + y - xy$. Définit-on une application de E^2 sur E ?

5-4 Soit $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{a, b, c, d\}$.

1° Quel est le nombre d'injections de E dans F.

2° Donner des représentations graphiques de ces injections.

5-5 Indiquer si les fonctions suivantes admettent une fonction réciproque. Dans l'affirmative, préciser cette fonction.

1° Ensemble de départ $\mathbb{R} - \{0\}$, Ensemble d'arrivée $\mathbb{R} - \{0\}$; $f(x) = \frac{1}{x}$.

2° Ensemble de départ : $\mathbb{R}$. Ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$. $f(x) = 2 - x^2$.

3° Ensemble de départ : $\mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$. Ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$. $f(x) = \frac{x + 2}{2x - 3}$.

4° Ensemble de départ : $\mathbb{R}^+$. Ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$. $f(x) = \sqrt{x}$.

5-6 1° Déterminer la fonction $f \circ f$ sachant que f est l'application identique de l'ensemble $\mathbb{N}$ sur lui-même [c'est-à-dire que $f(x) = x$].

2° Même question si f est telle que $f(x) = 3x + 2$.

3° Même question si f est l'application de $\mathbb{Q}^*$ dans $\mathbb{Q}^*$ (ensemble des nombres rationnels, zéro exclu) définie par $f(x) = \frac{1}{x}$.

4° Déterminer $g \circ f$ lorsque $f(x) = \sqrt{x}$ (avec x réel positif) et $g(y) = y^2$ (avec y réel positif).

5-7 Soit x un élément de $\mathbb{N}^*$ (ensemble des entiers naturels non nuls) et f la relation telle que :

$$x \overset{f}{\longmapsto} X = \{d ; d \mid x\}.$$

($d|x$ signifie d divise x).

Cette relation définit-elle une appplication de $\mathbb{N}^*$. Dans quel ensemble ?

Quelles sont les qualités de cette application ?

5-8 Quelles sont les qualités des applications, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, suivantes :

$$f : x \longmapsto f(x) = x^2.$$
$$g : x \longmapsto f(x) = x^2.$$

5-9 Quelles sont les qualités de l'application f de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathfrak{P}(E)$ telle que :

$$A \overset{f}{\longmapsto} {}^cA = \complement_E A.$$

5-10 Dans l'ensemble Δ_2 des directions de droites du plan, la relation :

$$\perp \text{ (est perpendiculaire à)} \qquad D \perp D'$$

est-elle une relation fonctionnelle?

Définit-elle une fonction bijective?

Mêmes questions dans l'ensemble Δ_3 des directions de droites de l'espace à trois dimensions.

5-11 Soit E l'ensemble des points d'une droite donnée F l'ensemble des points d'un cercle donné (géométrie plane). Soit $O \in F$. Soit f l'application qui, à tout point M de E, fait correspondre l'intersection M' autre que O, de la droite OM avec F. Préciser $f(E)$.

5-12 Soit P un plan. On définit, dans P, les relations binaires $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$ suivantes :

a) $M \mathcal{R}_1 M'$ si MM' a pour milieu un point O donné.

b) $M \mathcal{R} M'$ si MM' a son milieu sur une droite (D) donné.

c) $M \mathcal{R} M'$ si M' est le milieu de la corde joignant les points de contact des tangentes issues de M à un cercle (C) donnée

Etudier si ces relations sont fonctionnelles. Dans l'affirmative étudier les qualités des fonctions obtenues.

5-13 Soient f une application de E dans F, une partie A de E et B une partie de F.

Etablir les inclusions : $A \subset \overset{-1}{f}[f(A)]$ et : $f\left[\overset{-1}{f}(B)\right] \subset B$.

5-14 Soient f, g, h, des applications d'un ensemble E dans E.

Démontrer que :

1° si $f \circ h$ est surjective, alors f est surjective;

2° si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

5-15 Soit g une application surjective d'un ensemble E sur un ensemble F.

1° On dit que deux éléments a et b (de E) sont équivalents selon g si : $g(a) = g(b)$. Vérifier qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence.

2° Soit $\mathcal{R}'$ une relation d'équivalence dans F. On appelle $\mathcal{R}$ la relation binaire dans E vérifiée par deux éléments x et y si $g(x) \equiv g(y)$ (modulo $\mathcal{R}$).

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans E.

5-16 Soit E, F, G trois ensembles.

Soit f_1 et f_2, deux applications de E vers F, g_1 et g_2 deux applications de F vers G.

1° Si f_1 est surjective, à quelle condition a-t-on $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_1$?

2° Si g_1 est injective, à quelle condition a-t-on $g_1 \circ f_1 = g_1 \circ f_2$?

5-17 Soit f une fonction définie dans un ensemble E et prenant ses valeurs dans un ensemble F. On désigne par A_1 et A_2 deux parties quelconques de E, par $f(A_1)$ l'ensemble des images $f(x)$ pour $x \in A_1$.

1° Montrer que $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

2° Si $A_1 \subset A_2$, montrer que $f(A_1) \subset f(A_2)$.

3° On suppose de nouveau, A_1 et A_2 quelconques.
Soit $x \in A_1 \cup A_2$; montrer que $f(x) \in f(A_1) \cup f(A_2)$. En déduire que

$$f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_2) \cup f(A_2).$$

En remarquant que $A_1 \subset A_1 \cap A_2$ et $A_2 \subset A_1 \cap A_2$, et en appliquant le résultat du 2°, montrer que $f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$. En conclure que, quels que soient A_1 et A_2 :

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2).$$

4° Dans cette question, on suppose que f est **bijective**. On désignera par f^{-1} la fonction réciproque de f et on posera $A'_1 = f(A_1)$ ou $A_1 = f^{-1}(A'_1)$; de même $A'_2 = f(A_2)$ ou $A_2 = f^{-1}(A'_2)$.
En appliquant le résultat obtenu au 1°, à la fonction f^{-1} et aux parties A'_1 et A'_2, montrer que $f^{-1}(A'_1 \cap A'_2) \subset A_1 \cap A_2$. En appliquant le résultat obtenu au 2° aux deux membres de la relation précédente et à la fonction f, montrer que

$$f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2).$$

Déduire de 1° que $f(A_1) \cap f(A_2) = f(A_1 \cap A_2)$.

5° Démontrer que l'égalité ci-dessus subsiste si f est **injective.**

5-18 Pour tout sous-ensemble A d'un ensemble donné E, on appelle **fonction caractéristique** φ_A de A, l'application de E dans l'ensemble (0, 1) définie par :

$$\begin{cases} \varphi_A(x) = 0 & \text{si} \quad x \notin A \\ \varphi_A(x) = 1 & \text{si} \quad x \in A. \end{cases}$$

1° Pour $E = \{a, b, c, d\}$, et $A = \{b, d\}$, dessiner le graphe φ_A.
Calculer $1 - \varphi_A(x)$ pour tout $x \in E$. Quel est le sous-ensemble de E admettant pour fonction caractéristique la fonction ψ définie par $\psi(x) = 1 - \varphi_A(x)$ quel que soit $x \in E$?

2° Plus généralement, A étant un sous-ensemble d'un ensemble E, quel est le sous-ensemble de E admettant pour fonction caractéristique la fonction ψ, définie par $\psi(x) = 1 - \varphi_A(x)$ pour tout $x \in E$?

3° Les notations sont celles de 1°.
Soit $B = \{a, b, c\}$ et φ_B sa fonction caractéristique. Pour tout $x \in E$, calculer :

$$\varphi_A(x) \subset \varphi_B(x) \qquad \text{et} \qquad \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - \varphi_A(x) \times \varphi_B(x).$$

Quels sont les sous-ensembles de E admettant respectivement pour fonctions caractéristiques les fonctions g et h définies, pour tout $x \in E$, par :

$$g(x) = \varphi_A(x) \times \varphi_B(x) \qquad \text{et} \qquad h(x) = \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - \varphi_A(x) \times \varphi_B(x)\ ?$$

4° Plus généralement, A et B étant deux sous-ensembles quelconques d'un ensemble E, déterminer les sous-ensembles de E dont les fonctions caractéristiques respectives g et h sont définies par :

$$\forall\, x \in E \quad g(x) = \varphi_A(x) \times \varphi_B(x) \qquad \text{et} \qquad h(x) = \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - \varphi_A(x) \cdot \varphi_B(x).$$

5° Exprimer à l'aide de φ_A et φ_B la fonction caractéristique de l'ensemble $A - B$.
[On pourra commencer par traiter l'exemple indiqué aux 1° et 3°].

6° Même question pour l'ensemble $(A \cup B) - (A \cap B)$.

INDICATIONS



• **Russel** (Bertrand), né à Trellek, Pays de Galles, en 1872.

Mathématicien et philosophe britannique contemporain. Comme philosophe et sociologue il est connu pour son action publique en faveur du désarmement. Comme mathématicien, surtout logicien, fut parmi les premiers (en 1908) à découvrir, et à faire disparaître, de la théorie des ensembles élaborée par Cantor, diverses insuffisances.

• **Cantor** (Georg), né le 3 mars 1845 à Saint-Pétersbourg, mort le 6 janvier 1918 à Halle.

Ses réflexions sur les fondements des mathématiques le conduisirent à créer la *théorie des ensembles.*

5-1 1° f est surjective.

5-3 *Réponse* : oui.

5-4 1° *Réponse* : 24.

5-5 2° f n'est pas une bijection donc...

5-6 3° $f \circ f = 1_Q$.

5-10 $\perp$ est fonctionnelle dans Δ_2; ne l'est pas dans Δ_3.

5-12 $\mathcal{R}_1$ est une bijection; $\mathcal{R}_2$ n'est pas fonctionnelle; $\mathcal{R}_3$ est une bijection de ... sur ...

5-16 2° $f_1 = f_2$.

5-17 1° $y \in f(A_1 \cap A_2) \Longrightarrow (\exists x \in A_1 \cap A_2, f(x) = y)$

Or $(x \in A_1$ et $x \in A_2) \Longrightarrow [y \in f(A_1)$ et $y \in f(A_2)]$ ...

2° $y \in f(A_1) \Longrightarrow (\exists x \in A_1, f(x) = y)$

De plus $x \in A_1 \Longrightarrow x \in A_2$ donc $y \in f(A_2)$ ...

5° $y \in f(A_1) \cap f(A_2) \Longrightarrow [\exists x \in A_1, f(x) = y$ et $\exists x' \in A_2, f(x') = y]$

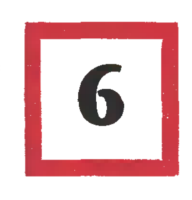
Si f est injective, $x = x'$ donc ...

5-18 2° $\complement_E A$.

4° La fonction g est associée à $A \cap B$ et h est associée à $A \cup B$.

6° $\varphi(x) = \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - 2\varphi_A(x) \cdot \varphi_B(x)$.

LOIS DE COMPOSITION INTERNE



● *Dans la 2e leçon nous avons exposé des notions sur les ensembles, sous la forme d'une description, un peu de la manière dont on présente les pièces du jeu avant que ne débute une partie. Dans les leçons 3, 4, 5, nous avons mis en relation les éléments de deux ensembles, ou d'un même ensemble.*

● *Il s'agit maintenant de préciser les* « **règles du jeu** » *que nous choisissons, c'est-à-dire le « comportement », les uns par rapport aux autres, des éléments des ensembles que nous allons étudier (un peu comme le* « **Code de route** » *règle, dans un pays, le déplacement des véhicules et interdit l'usage incontrôlé de ceux-ci).*

● *Autrement dit, l'étude qui suit est du domaine de l'***Algèbre.** *Il s'agit de définir, dans un ensemble, les règles permettant de « combiner » entre eux deux éléments de l'ensemble. Cela signifie, « faire correspondre », à tout couple d'éléments, un nouvel élément, déterminé, de l'ensemble : c'est la notion de* **loi de composition interne** (*ou* **opération interne**).

Du rapprochement de **modèles** *présentant une forme commune, nous dégagerons la notion de* **qualités d'une loi de composition interne** *et celle* **d'éléments remarquables.**

● *A la sèche énumération des diverses « règles du jeu » classiques nous avons préféré un exposé permettant, d'une part une révision de divers ensembles importants étudiés dans les classes précédentes, d'autre part une illustration des notions nouvelles que nous introduisons.*

C'est dire que la connaissance de cette leçon permet une réelle économie de pensée, ce qui nous semble la justifier amplement.

1. LOIS DE COMPOSITION INTERNES DANS UN ENSEMBLE

EXEMPLES

1 Dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, à tout couple (a, b) d'entiers, nous savons faire correspondre un entier bien déterminé appelé somme de a et b (et noté $a + b$). C'est dire que nous définissons une **application** (5e leçon) **du produit cartésien** $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ **dans** $\mathbb{N}$.

Dans un tel cas, on remplace l'expression « **application de** $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ **dans** $\mathbb{N}$ » par :
« **opération interne dans** $\mathbb{N}$ ».

Dans cet exemple « l'opération » ou loi de composition interne, s'appelle addition. On note :

$$(a, b) \xrightarrow{+} a + b$$

2 Dans le même ensemble $\mathbb{N}$, on a défini une autre opération, appelée **multiplication** qui, au couple d'entiers (a, b), associe leur **produit** (noté $a \times b$ ou $a \, . \, b$ ou ab).

On peut écrire :

$$(a, b) \xrightarrow{\times} a \times b$$

3 Considérons l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E

A deux parties A et B, nous avons fait correspondre (2e leçon) une nouvelle partie appelée **intersection de A et B** (et notée $A \cap B$). On dit que l'**intersection** (par abus de langage, il y a confusion entre l'opération et le résultat de celle-ci), est une opération interne dans $\mathcal{P}(E)$. On note :

$$(A, B) \xrightarrow{\cap} (A \cap B)$$

4 Considérons un plan $\mathcal{P}$ comme ensemble de points. A tout couple (P, Q) de points, faisons correspondre leur milieu M. Nous définissons ainsi une **application (ou loi de composition interne dans** $\mathcal{P}$**)** de $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$.

Si nous convenons de noter cette opération par le signe $*$ (lu « **étoile** » ou « **aster** »), nous écrirons :

$$(P, Q) \xrightarrow{*} M \quad \text{ou} \quad M = P * Q$$

• DÉFINITION

Une loi de composition interne (ou opération interne) dans un ensemble E est une application de E^2 dans E.

Cela signifie qu'*à tout couple* (a, b) **correspond un élément bien déterminé de E, appelé le** *composé de* **a** *et de* **b** par l'opération considérée.

Si **f** est cette application et **c** l'*image* par **f** de **(a, b)**, on peut utiliser la notation indiquée 3e leçon :

$$(a, b) \xrightarrow{f} c \quad \text{ou} \quad f[(a, b)] = c$$

(ce qui se lit « **c** *est le composé de* **a** *et* **b** *par* **f** »).

Il est souvent commode de remplacer cette notation par la suivante : l'opération étant représentée par un symbole arbitraire, le composé de deux éléments est représenté par ces éléments séparés par le symbole opératoire.

Ainsi :

1 Dans $\mathcal{P}(E)$, l'*intersection* est une loi de composition interne, notée $\cap$:

$$(A, B) \xrightarrow{\cap} A \cap B$$

De même la *réunion*, notée $\cup$:

$$(A, B) \overset{\cup}{\rightarrow} A \cup B$$

❷ Dans l'ensemble $\mathfrak{F}$ des applications de E dans E, la *composition* des applications est une *loi* de composition interne, notée $\circ$:

$$(f, g) \overset{\circ}{\rightarrow} g \circ f$$

❸ Dans les ensembles : $\mathbb{N}$, des entiers naturels ; $\mathbb{Z}$, des entiers relatifs, $\mathbb{Q}$, des nombres rationnels ; $\mathbb{R}$, des nombres réels, ont été définies les lois de composition internes suivantes :

l'*addition* notée $+$ $\quad (x, y) \overset{+}{\rightarrow} x + y$

la *multiplication*, notée $\times$, ou $\cdot$, ou sans aucun signe $\quad (x, y) \rightarrow xy$.

Lorsque, dans un ensemble E, on définit une nouvelle *loi* de composition interne, on utilise usuellement les signes opératoires suivants : $*$ (lu « **étoile** ») ; $\top$ (lu « **truc** ») ; $\perp$ (lu « **antitruc** ») ; Δ (lu « **delta** » *ou* « **tri** »).

Par exemple pour l'opération $*$, $c = a * b$ se lit « **c égale a étoile b** ».

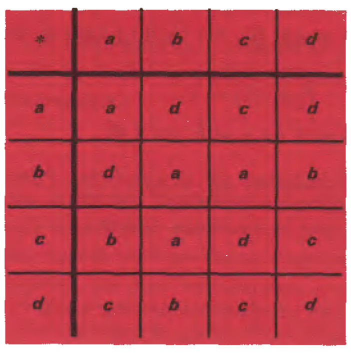
• TABLE DE PYTHAGORE D'UNE OPÉRATION

C'est un tableau à double entrée (fig. 1), tel que :

- la 1re ligne contient les premiers éléments des couples ;
- la 1re colonne les deuxièmes éléments des couples ;
- le composé de *a* et de *b* est inscrit à l'intersection de la colonne de *a* et de la ligne de *b*.

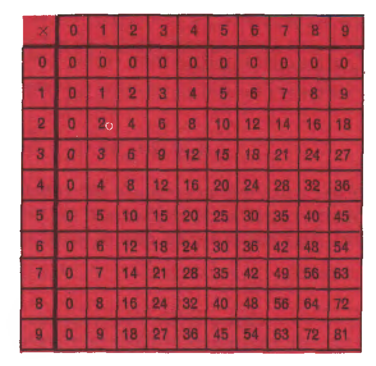
Bien entendu, lorsque l'ensemble dans lequel est définie l'opération est infini, on ne peut dresser qu'une Table de Pythagore partielle.

Les Tables de Pythagore, partielles, les plus connues sont celles relatives à l'addition et à la multiplication (fig. 2) des entiers naturels écrits dans la base **dix**. Notons que, dans ce cas, contrairement à l'exemple donné (fig. 1), la distinction entre « lignes » et « colonnes » est inutile.



*	*a*	*b*	*c*	*d*
a	*a*	*d*	*c*	*d*
b	*d*	*a*	*a*	*b*
c	*b*	*a*	*d*	*c*
d	*c*	*b*	*c*	*d*

Fig. 1.



×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Fig. 2.

QUALITÉS D'UNE LOI DE COMPOSITION INTERNE

2. ASSOCIATIVITÉ

EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES

1 Soit l'**addition** dans l'ensemble $\mathbb{N}$:

(3 + 5) + 7 signifie 8 + 7, soit 15 ;
3 + (5 + 7) signifie 3 + 12, soit 15.

D'où il résulte que :

$$(3 + 5) + 7 = 3 + (5 + 7)$$

Il est possible de démontrer que cette propriété est générale, c'est-à-dire que, **quels que soient les entiers** *a*, *b*, *c* :

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

On dit que l'**addition des entiers naturels est associative.**

2 Soit, dans l'ensemble $E = \{a, b, c\}$ l'opération définie par la table de Pythagore ci-dessous ($\top$ étant le signe opératoire) :

⊤	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

$$(a \top b) \top c) = c \top c = c$$
$$a \top (b \top c = a \top a = a.$$

Ici, au contraire, il n'y a pas égalité des deux expressions. La loi $\top$ n'est pas associative.

3 On démontre également que **la multiplication des entiers naturels est associative,** c'est-à-dire que :

$\forall(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$,

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

4 Soit, dans l'ensemble des rationnels, l'opération (appelée **moyenne arithmétique**, et que nous noterons $*$) qui, à deux nombres rationnels *a* et *b*, fait correspondre leur demi-somme $\frac{a + b}{2}$.

Cette opération n'est pas associative.

En effet, par exemple :

$$(24 * 8) * 4 \neq 24 * (8 * 4)$$

car :

$$24 * 8 = \frac{24 + 8}{2} = 16 ;$$

$$16 * 4 = \frac{16 + 4}{2} = 10$$

alors que :

$$8 * 4 = \frac{8 + 4}{2} = 6 ;$$

$$24 * 6 = \frac{24 + 6}{2} = 15.$$

DÉFINITION

Dans un ensemble, une opération (notée $*$, par exemple) **est dite associative si, quels que soient les éléments a, b, c, de l'ensemble :**

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$



Dans ce cas, on notera ces deux expressions $a * b * c$, sans parenthèses.

Ainsi :

— Les lois $\cap$ et $\cup$ sont, dans $\mathfrak{P}$(E), associatives.

— la loi o est associative dans l'ensemble $\mathfrak{F}$ des applications d'un ensemble E vers E (5ᵉ leçon).



● **PROPRIÉTÉ**

Si, dans un ensemble E, *la loi* $*$ *est associative, on définit le composé*

$x_1 * x_2 * x_3 * \ldots * x_n$ *avec* $n \in \mathbb{N}$, de la façon suivante :

$$x_1 * x_2 * x_3 * \ldots * x_n = (x_1 * x_2 * x_3 * \ldots * x_{(n-1)}) * x_n$$

3. COMMUTATIVITÉ

EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLE

❶ **Soit l'addition dans l'ensemble des entiers naturels**

Nous savons que :

$5 + 3 = 8$ et que $3 + 5 = 8$

Donc : $5 + 3 = 3 + 5$

On démontre que, plus généralement, **quels que soient les entiers** a **et** b :

$$a + b = b + a$$

On dit que l'addition des entiers est commutative.
Ceci signifie que l'opération peut être considérée comme définie, non sur les couples, mais sur **les paires d'entiers naturels.**

❷ On démontre de même que la multiplication dans $\mathbb{N}$ est commutative, c'est-à-dire que, quels que soient a et b :

$$a \times b = b \times a.$$

❸ L'opération « moyenne arithmétique » (§ 2) est commutative car, quels que soient a et b :

$$a * b = \frac{a + b}{2} = \frac{b + a}{2} = b * a.$$

❹ Soit, dans l'ensemble $\mathbb{N}^*$ des entiers naturels (zéro exclu), l'opération « **exponentiation** » qui, au couple (a, b) associe l'entier naturel a^b.

Montrons que cette opération **n'est pas commutative.**
Pour cela, il suffit de donner un contre-exemple. Or :

$(2, 3) \mapsto 2^3 = 8$

$(3, 2) \mapsto 3^2 = 9.$



● **DÉFINITION**

Une opération (notée, $*$ par exemple), **définie dans un ensemble,** est dite **commutative si, quels que soient les éléments a et b de l'ensemble :**

$$\mathbf{a * b = b * a}$$

Cela signifie que le résultat est indépendant de la place des éléments dans le couple (a, b), et que par suite l'opération peut être considérée comme définie sur les *paires*.

Ainsi :

— Dans $\mathcal{P}(E)$, les lois $\cup$ et $\cap$ sont commutatives.

— Dans $\mathcal{F}$, ensemble des applications d'un ensemble E vers E, la loi $\circ$ n'est pas commutative. Un contre-exemple suffit à le démontrer.

• REMARQUE

Lorsque la loi n'est pas commutative, *il peut exister* des éléments x et y tels que $x * y = y * x$. Deux tels éléments sont dits **permutables** (ou **commutables**) pour la loi considérée.

Ainsi, par exemple dans $\mathbb{N}^*$, soit la loi d'**exponentiation** : $(a, b) \mapsto a^b$.
D'après ce qui précède, cette loi **n'est pas commutative.** Cependant :

$$(2,4) \mapsto 2^4 = 16 \qquad \text{et} \qquad (4,2) \mapsto 4^2 = 16.$$

Les éléments 2 et 4 sont dits **permutables** (ou **commutables**).

• PROPRIÉTÉ



Si, dans un ensemble E, *une loi de composition interne* (*notée* $*$, *par exemple*) *est commutative et associative, alors le composé* $(x_1 * x_2 * \ldots * x_n)$ *est inchangé lorsqu'on permute ou associe, de facon arbitraire les éléments* $x_1, \ldots, x_n$.

❶ Soit :

$$y = x_1 * \ldots * x_h * x_i * x_j * \ldots * x_n \quad \text{et} \quad u = x_1 * \ldots * x_h * x_i * x_j$$

D'après la définition donnée § 2, $u = [(x_1 * \ldots * x_h) * x_i] * x_j$
d'après l'associativité, $u = (x_1 * \ldots * x_h) * (x_i * x_j)$
d'après la commutativité, $u = (x_1 * \ldots * x_h) * (x_j * x_i)$

Et d'après l'associativité : $u = [(x_1 * \ldots * x_h) * x_j] * x_i$
par suite : $u = x_1 * \ldots * x_h * x_j * x_i$

Donc : $y = x_1 * \ldots x_h * x_j * x_i * \ldots * x_n$

Nous avons ainsi *permuté deux éléments consécutifs quelconques.* Par répétition de cette opération, nous pouvons permuter deux éléments quelconques, x_h et x_k.

❷ Pour *associer* $(x_h * x_j * x_l)$ par exemple, il suffit, par permutation, d'amener x_h, x_j, x_l en position de 1er, 2e et 3e éléments respectivement :

$$y = x_h * x_j * x_l * x_1 * x_2 * \ldots * x_n$$

Et, par définition, $y = (x_h * x_j * x_l) * x_1 * \ldots * x_n$.

Enfin, par permutation $(x_h * x_i * x_l)$ peut ensuite occuper n'importe quelle position.

Cette importante propriété se rencontre dans de très nombreux exemples, en particulier ceux cités ci-dessus, dans lesquels l'opération considérée est à la fois commutative et associative : $\cap$ et $\cup$, dans $\mathcal{P}(E)$;
addition et multiplication dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

4. DISTRIBUTIVITÉ D'UNE OPÉRATION POUR UNE AUTRE

EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES

1 Soit l'addition et la multiplication dans $\mathbb{N}$:

$3 \times (7 + 5)$

signifie 3×12 soit 36.

Or $3 \times 7 = 21$ $3 \times 5 = 15$

et $21 + 15 = 36$.

On démontre que, quels que soient les entiers a, b, c :

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$
$$(b + c) \times a = (b \times a) + (c \times a)$$

On dit que **la multiplication** (dans $\mathbb{N}$) **est distributive par rapport à l'addition.**

2 Il est bon de remarquer que l'**addition des entiers n'est pas distributive rapport à la multiplication.** En général :

$$a + (b \times c) \neq (a + b) \times (a + c)$$

3 Soit $\mathfrak{P}(E)$ l'ensemble des parties d'un ensemble E. Quelles que soient les deux parties A et B, nous avons fait correspondre deux nouveaux sous-ensembles appelés **intersection** $(A \cap B)$ et **réunion** $(A \cup B)$ de A et B.

On peut démontrer que :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(donc l'**intersection est distributive par rapport à la réunion**) et que :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

(la réunion est distributive par rapport à l'intersection).

4 Soit l'**exponentiation** dans $\mathbb{N}^*$, zéro exclu (§ 3).
Quels que soient les entiers a, b, c, on montre que :

$$(a \times b)^c = a^c \times b^c$$

mais, qu'en général :

$$a^{b \times c} \neq a^b \times a^c$$

On dit que l'exponentiation est distributive **à droite** par rapport à la multiplication, mais qu'elle ne l'est pas à gauche.

DÉFINITION

Soit deux lois (notées, par exemple, $*$ et $\top$) **opérant dans le même ensemble. La loi notée $*$ est *distributive à gauche* (resp. à *droite*) pour (ou par rapport à) la loi $\top$ si, quels que soient les éléments *a*, *b*, *c* de l'ensemble :**

$$a * (b \top c) = (a * b) \top (a * c)$$

resp. $$(b \top c) * a = (b * a) \top (c * a)$$



Lorsque la loi notée $*$ est commutative, les deux propriétés se confondent. Une loi distributive à gauche et à droite pour une deuxième loi est dite **distributive.**

ÉLÉMENTS REMARQUABLES

5. ÉLÉMENTS NEUTRES

EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES

❶ **Considérons l'addition dans l'ensemble** $\mathbb{N}$.

Nous savons que, **quel que soit l'entier** a : $a + 0 = 0 + a = a$.

On dit que **« zéro » est neutre pour l'addition.**

De même, dans l'ensemble $\mathbb{N}$, l'élément 1 est **neutre pour la multiplication** puisque :

$$\forall a \in \mathbb{N}, \quad 1 \times a = a \times 1 = a.$$

❷ L'opération **« moyenne arithmétique » (§ 2) n'a pas d'élément neutre.**

❸ Soit, dans l'ensemble $\mathbb{N}^*$ des entiers naturels, zéro exclu, l'opération appelée **exponentiation** qui, au couple (a, b), fait correspondre a^b.

Quel que soit a :

$$(a, 1) \mapsto a^1 = a$$

Dans ce cas, on dit que 1 est **neutre à droite**

Mais, si $a \neq 1$, $1^a \neq a$.

Par suite, 1 n'est pas neutre à gauche.

• DÉFINITION

Dans un ensemble, un élément e est dit *neutre* pour une loi de composition interne (notée $*$ par exemple) **si, quel que soit l'élément a de l'ensemble :**



$$e * a = a * e = a$$

Si la loi est commutative, il suffit d'indiquer que :

$$\forall a \in E, \quad e * a = a.$$

• DÉFINITION

Dans un ensemble, un élément e est dit *neutre à gauche* (resp. *à droite*) pour une loi de composition interne (notée $*$ par exemple) **si, quel que soit l'élément a de l'ensemble :**



$$e * a = a$$

$$(\text{resp.} \quad a * e = a)$$

Dans le cas où la loi $*$ est commutative, les deux propriétés se confondent.

Ainsi :

— Dans $\mathfrak{P}(E)$, l'ensemble E est neutre pour l'opération $\cap$ et l'ensemble vide, $\varnothing$, est neutre pour l'opération $\cup$.

— Dans l'ensemble $\mathfrak{F}$ des applications de E dans E, l'application identique, 1_E, est neutre pour la loi $\circ$.

— Dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, l'élément 0 est neutre pour la loi $+$ et l'élément 1 est neutre pour la loi $\times$.

REMARQUES

1 S'il existe un élément e_1 neutre à gauche, et un élément e_2 neutre à droite, ces éléments sont égaux.

En effet : $\begin{cases} e_1 * e_2 = e_2 & (e_1 \text{ neutre à gauche}) \\ e_1 * e_2 = e_1 & (e_2 \text{ neutre à droite}) \end{cases}$

Par suite :

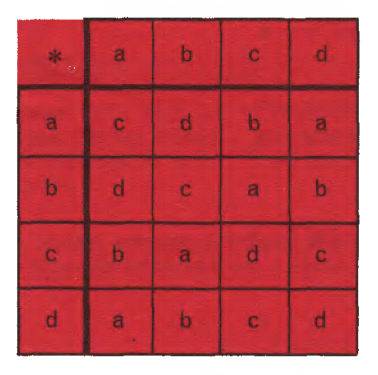
$$e_1 * e_2 = e_1 = e_2 \quad \text{et} \quad e_1 = e_2$$

2 S'il existe un élément neutre pour une opération, cet élément est unique. Cela résulte de la démonstration ci-dessus.

6. ÉLÉMENTS SYMÉTRIQUES

EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES

1 Soit, dans un ensemble E de 4 éléments (notés *a*, *b*, *c*, *d*), l'opération (notée $*$) définie par la Table de Pythagore suivante :



*	a	b	c	d
a	c	d	b	a
b	d	c	a	b
c	b	a	d	c
d	a	b	c	d

Il est clair que l'élément *d* est **neutre** pour l'opération.

D'autre part $a * b = b * a = d$.

On dit que *a* et *b* sont **deux éléments symétriques** (ou qu'ils se neutralisent).

2 Soit l'addition dans l'ensemble $\mathbb{N}$ Nous savons que **zéro** est élément neutre. Or, quel que soit *a*, différent de zéro, il n'existe pas d'entier naturel *x* tel que $a + x = 0$.

On dit que les entiers, sauf 0, n'ont pas, dans l'ensemble $\mathbb{N}$, de symétrique par rapport à l'**addition.**

3 De même, 1 est **neutre** pour la multiplication des entiers. Or, quel que soit *a*, différent de 1, il n'existe pas d'entier *y* tel que $a \times y = 1$.

4 Dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, tout élément admet un symétrique par rapport à l'addition, mais non par rapport à la multiplication (sauf 1 et -1 qui sont leur propre symétrique).



• DÉFINITIONS

Dans un ensemble admettant un élément neutre (noté *e*) pour une opération (notée $*$ par exemple), **un élément *a'* est *inverse à gauche*, de l'élément *a*, si :**

$$a' * a = e$$

Un élément *a''* est *inverse, à droite*, de *a* si : $a * a'' = e$

L'élément *a'* est *symétrique* de *a* si : $a' * a = a * a' = e$

Remarquons que, dans ce cas, *a* est aussi symétrique de *a'*; les éléments *a* et *a'* sont dits **symétriques.** On dit aussi qu'un élément est *symétrisable*, ou *inversible*, s'il a un symétrique.

Dans les ensembles de nombres, l'usage consacre le nom d'**opposé** au symétrique pour la loi $+$, et d'**inverse** au symétrique pour la loi $\times$. Dans les ensembles de bijections, le nom d'**application réciproque** est donné au symétrique, pour la loi o, d'une bijection.

• PROPRIÉTÉS



P_1 *Si, pour une loi* **associative,** *un élément a un inverse à gauche et un inverse à droite, ces inverses sont égaux.*

Soit, pour un élément *a*, un inverse à gauche *a'* et un inverse à droite *a"*. Pour utiliser l'associativité, calculons de deux façons : $a' * a * a''$.

$$a' * a * a'' = (a' * a) * a'' = e * a'' = a''$$

Et : $$a' * a * a'' = a' * (a * a'') = a' * e = a'$$

Donc : $$a' * a * a'' = a'' = a' \qquad \text{Et :} \quad a' = a''$$

P_2 *Si, pour une loi* **associative,** *un élément a un symétrique, ce symétrique est unique.*

Cela résulte de la démonstration ci-dessus.

7. ÉLÉMENTS RÉGULIERS

EXEMPLE ET CONTRE-EXEMPLE

❶ Quels que soient les nombres réels *a, b, x*, on démontre que :

$$a + x = b + x$$

implique :

$$a = b$$

On dit que **tous les nombres réels sont réguliers pour l'addition.**

❷ Dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels : $a \times x = b \times x$

n'**implique pas** :

$$a = b \quad (\text{sauf si } x \neq 0)$$

On dit que tout nombre réel, **sauf zéro** est régulier pour la multiplication. Puisque, $\forall a \in \mathbb{R} \;\; a \times 0 = 0 \times a = 0$ **zéro,** est dit **singulier** ou **absorbant.**



• DÉFINITIONS

— Un élément *a* est *régulier* (ou *simplifiable*) pour une opération (notée $*$ par exemple) dans un ensemble, si, *x* et *y* désignant des éléments quelconques de l'ensemble :

$$a * x = a * y \implies x = y \quad \text{et} \quad x * a = y * a \implies x = y$$

— Un élément *s* est **singulier** (ou **absorbant**) si, quel que soit l'élément **x**,

$$s * x = x * s = s$$

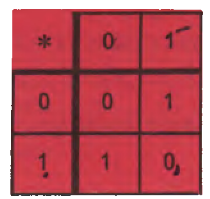


EXERCICES

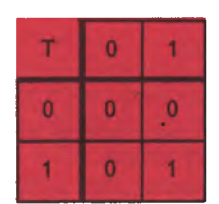
6-1 Soit l'ensemble E formé de deux éléments, notés 0 et 1, $E = \{0, 1\}$.

1° Dans cet ensemble, on définit une opération (notée $*$) par la Table de Pythagore ci-dessous.

Cette loi est-elle associative ? commutative ? Admet-elle un élément neutre ? Les éléments admettent-ils un symétrique ?



$*$	0	1
0	0	1
1	1	0



$\top$	0	1
0	0	0
1	0	1

2° Dans le même ensemble on définit une autre opération (notée $\top$) par la Table de Pythagore ci-dessus. Cette loi est-elle associative ? commutative ? Admet-elle un élément neutre ? Les éléments admettent-ils un symétrique ? Existe-t-il des éléments singuliers ?

3° Etudier la distributivité de chacune des lois par rapport à l'autre.

6-2 Soit E l'ensemble ayant pour éléments les quatre entiers 0, 1, 2, 3.

1° On définit une loi (notée $\wedge$) par :

« $x \wedge y =$ **minimum de** x **et** y » (*exemples* : $0 \wedge 1 = 0$; $2 \wedge 2 = 2$)

Dresser la Table de Pythagore de cette loi. Est-elle associative ? commutative ? Admet-elle un élément neutre ? Existe-t-il un élément singulier ?

2° Mêmes questions pour la loi (notée $\vee$) telle que :

« $x \vee y =$ **maximum de** x **et** y » (*exemples* : $0 \vee 2 = 2$; $1 \vee 1 = 1$)

3° Montrer que chacune des lois est distributive par rapport à l'autre.

6-3 Dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, on définit l'opération (notée $*$) telle que :

$$\forall a \in \mathbb{N}, \quad \forall b \in \mathbb{N}, \quad a * b = a + b + ab$$

1° Calculer $1 * 2$; $0 * 2$; $3 * 4$; $(2 * 5) * 3$; $2 * (5 * 3)$.

2° Quelles sont les qualités de l'opération $*$?

3° Existe-t-il un élément neutre, dans $\mathbb{N}$, pour la loi $*$?
Existe-t-il dans $\mathbb{N}$ des éléments symétrisables pour la loi $*$?

4° Etudier la distributivité de cette loi pour l'addition dans $\mathbb{N}$; pour la multiplication dans $\mathbb{N}$.

5° On définit $a^{(n)}$ pour $n \geqslant 1$ par ; $\begin{cases} a^{(1)} = a \\ a^{(n)} = a^{(n-1)} * a \end{cases}$
Exprimer $a^{(2)}$, $a^{(3)}$, $a^{(4)}$.

6° Résoudre, dans $\mathbb{N}$, l'équation : $(3 * x^{(2)}) + (2 * x) = 160$.

6-4 Dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, on définit une opération (notée $\top$) par $a \top b = 2a + b$.

1° Calculer :
$0 \top 2$ $\quad 2 \top 0$ $\quad (-5) \top (-1)$ $\quad (-2) \top [3 \top (-1)]$ $\quad [(-2) \top (3)] \top (-1)$,

2° L'opération est-elle commutative ? associative ?

3° Existe-t-il un neutre à droite ? à gauche ? un élément neutre ?

4° Etudier la distributivité de l'opération $\top$ par rapport à l'addition.

5° Etudier la distributivité de l'addition par rapport à l'opération $\top$.

6° On définit $a^{(n)}$, pour $n \geqslant 1$, par $a^{(1)} = a$ et $a^{(n)} = a^{(n-1)} \top a$.
Exprimer $a^{(2)}$, $a^{(3)}$, $a^{(4)}$.

6-5 Dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, on définit une opération (notée $\perp$) par $a \perp b = a^2 + b^2$.

1° Calculer :
$(-2) \perp 1$ $\quad 1 \perp (-2)$ $\quad (-5) \perp 3$ $\quad (-5) \perp (3 \perp 1)$ $\quad (-5 \perp 3) \perp 1$.

2° L'opération est-elle commutative ? associative ?

3° Existe-t-il un élément neutre ?

4° On définit $a^{(n)}$, pour $n \geqslant 1$, par $a^{(1)} = a$ et $a^{(n)} = a^{(n-1)} \perp a$.
Exprimer $a^{(2)}$, $a^{(3)}$, $a^{(4)}$, $a^{(5)}$.

6-6 Dans l'ensemble $\mathbb{N} - \{0\}$, c'est-à-dire des entiers naturels, zéro excepté, on définit l'opération **exponentiation** (notée $*$) telle que $a * b = a^b$.

1° Calculer :
$1 * 1$; $2 * 1$; $3 * 2$; $2 * 3$; $2 * (1 * 3)$; $(2 * 1) * 3$; $(-2) * (-2)$; $10 * (-1)$; $(-10) * 1$.

2° La loi est-elle associative ? commutative ?

3° Existe-t-il un élément neutre à droite ? un neutre à gauche ? un élément neutre ?

4° Etudier la distributivité de l'exponentiation par rapport à la multiplication.

6-7 Dans l'ensemble $\mathbb{N}^*$ dse entiers naturels, zéro exclu, on définit deux opérations

(notée $\wedge$ et $\vee$), de la façon suivante :

$$a \wedge b = \text{p.g.c.d. de } a \text{ et } b\,; \qquad a \vee b = \text{p.p.c.m. de } a \text{ et } b$$

1° Calculer $12 \wedge 3$; $12 \vee 36$; $5 \wedge 2$; $2 \vee 5$; $5 \wedge 2$.

2° Ces opérations sont-elles commutatives ? Existe-t-il un élément neutre ?

3° Vérifier sur deux exemples que : $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
et $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

6-8 Dans l'ensemble des rationnels (zéro exclu), on définit l'opération (notée $*$) qui, à deux rationnels a et b (non nuls), fait correspondre le rationnel :

$$a * b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

1° Calculer $a * b$ pour $a = -50$, $b = -20$; puis pour $a = \frac{5}{4}$, $b = \frac{25}{7}$.

2° L'opération $*$ est-elle commutative ? est-elle associative ?

3° L'opération $*$ possède-t-elle un élément neutre ?

6-9 Dans l'ensemble des rationnels, on définit une opération (notée $\top$) par :

$$a \top b = a + 2ab + b$$

1° Calculer $\left(\frac{1}{3}\right) \top \left(\frac{3}{4}\right)$ $\quad (-2) \top \left(\frac{1}{2}\right)$ $\quad \left(\frac{4}{5}\right) \top \left(-\frac{5}{4}\right)$

2° Etudier la commutativité, l'associativité et l'opération.

3° Existe-r-il un élément neutre ? Quels sont les éléments symétrisables ?

4° Démontrer que le composé de deux éléments distincts de $-\frac{1}{2}$ est un rationnel différent de $-\frac{1}{2}$.

5° Démontrer que tout rationnel différent de $-\frac{1}{2}$ admet un symétrique $\left(\text{différent de } -\frac{1}{2}\right)$.

6-10 Dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels, on définit la loi $*$ par $a * b = a + b + 3ab$.

1° Calculer $(-1) * (-2)$ $\quad \frac{1}{4} * \left(-\frac{2}{3}\right)$ $\quad [(-2) * 5] * (-4)$.

2° Quelles sont les qualités de la loi $*$?

3° Existe-t-il un élément neutre ? Quels sont les éléments symétrisables ?
Quel est le symétrique de -3 ? de $\frac{2}{3}$?

4° Démontrer que la restriction de $*$ à $\mathbb{Q}' = \mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ est interne à $\mathbb{Q}'$.

6-11 On considère l'ensemble A des nombres réels de la forme $a + b\sqrt{2}$, les nombres a et b étant des entiers relatifs.

1° Démontrer que $a + b\sqrt{2} = 0$ implique $a = b = 0$.
En déduire que l'égalité $a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2}$ implique $a = a'$ et $b = b$.

2° Dans l'ensemble A, on définit une addition, notée $\dot{+}$, par :

$$(a_1 + b_1\sqrt{2}) \dot{+} (a_2 + b_2\sqrt{2}) = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)\sqrt{2}$$

Etudier : l'associativité ; la commutativité, l'existence d'un élément neutre ; l'existence, pour un élément, d'un symétrique.

3° Dans l'ensemble A, on définit une multiplication, noté $\dot{\times}$, par :

$$(a_1 + b_1\sqrt{2}) \dot{\times} (a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_1a_2 + 2b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)\sqrt{2}$$

Etudier : l'associativité ; la commutativité ; la distributivité par rapport à l'addition ; l'existence d'un élément neutre.

4° Démontrer que les seuls éléments de A inversibles sont tels que :

$$a^2 - 2b^2 = \pm 1$$

6-12 Dans l'ensemble $\mathfrak{T}(E)$ des parties d'un ensemble E, on définit l'opération (notée Δ) qui, à deux sous-ensembles A et B de E, fait correspondre l'ensemble $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.

1° Dessiner un schéma représentant cette opération.

2° L'opération est-elle commutative ?

3° L'opération est-elle associative ?

4° Démontrer qu'il existe un élément neutre. Tout élément (sous-ensemble de E) possède-t-il un symétrique ?

5° Démontrer que l'opération « intersection » ($\cap$) est distributive par rapport à l'opération Δ.

6-13 Soit E un ensemble de trois éléments notés A, B, C (fig. 3).

1° Soit f_2 la bijection de E sur E telle que :

$f_2(A) = B \qquad f_2(B) = C \qquad f_2(C) = A.$

Soit f_4 la bijection de E sur E telle que

$f_4(A) = A \qquad f_4(B) = C \qquad f_4(C) = B.$

Calculer $f_4 \circ f_2$ et $f_2 \circ f_4$.

2° Démontrer qu'il existe six bijections, et six seulement, de E sur E (on désignera ces bijections par $f_1, f_2, \ldots, f_6$).

3° On désigne par $\mathfrak{F}(E)$ l'ensemble ayant pour éléments les six bijections $f_1, f_2, \ldots, f_6$. Dans cet ensemble, on considère l'opération (notée « o ») qui, à deux bijections, fait correspondre leur composée.

Dresser la Table de Pythagore de cette opération.

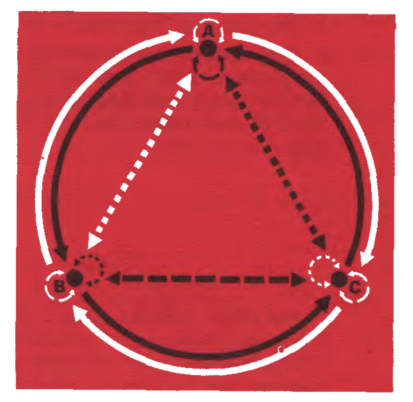


Fig. 3. A chaque type de flèche correspond une bijection. L'élément origine d'une flèche a pour image l'élément extrémité de la flèche.

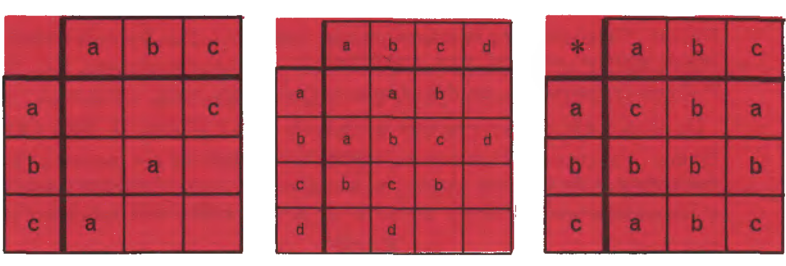
4° Démontrer que l'opération « o » est associative, mais non commutative.

6-14 Soit un ensemble (E) de trois éléments *a*, *b*, *c*, muni d'une loi de composition interne, connue de façon incomplète par le tableau I ci-dessous.

1° Y a-t-il associativité quelle que soit la manière de compléter le tableau ? Est-il impossible qu'il y ait associativité ?

2° Mêmes questions pour la commutativité.

3° Existe-t-il un élément neutre, quelle que soit la manière de compléter le tableau ?



	a	b	c
a			c
b		a	
c	a		

Tableau I.

	a	b	c	d
a		a	b	
b	a	b	c	d
c	b	c	b	
d		d		

Tableau II.

*	a	b	c
a	c	b	a
b	b	b	b
c	a	b	c

Tableau III.

6-15 Mêmes questions pour un ensemble de quatre éléments muni de la loi interne connue de manière incomplète par le tableau II.

6-16 Pour la loi de composition interne (notée $*$ et définie par le tableau III) déterminer tous les éléments x vérifiant les relations.

1° $x * b = c$ 2° $x * x = c$ 3° $x * x = x$ 4° $c * x = x$

6-17 Soit, dans un ensemble E, une opération (notée $\top$) associative. Soit a un élément fixé de E. On définit une nouvelle opération (notée $*$), qui, au couple (x, y), fait correspondre l'élément :

$$x * y = x \top a \top y$$

1° Montrer que l'opération $*$ est associative.

2° Montrer que l'opération $*$ est commutative si l'opération $\top$ l'est.

3° On suppose maintenant que l'opération $\top$ est commutative, qu'elle possède un élément neutre (noté e) et que tout élément possède un symétrique.
Montrer alors que l'opération $*$ admet un élément neutre que l'on précisera.
Montrer que tout élément de E possède un symétrique (pour l'opération $*$) que l'on déterminera.



INDICATIONS

• **Abel** (Niels, Henrik), né le 5 août 1802 à Findoe (Norvège), mort le 6 avril 1829 à Arendal (Norvège).
Génial mathématicien norvégien qui vécut dans la pauvreté. En *Algèbre*, ses travaux portèrent sur la *résolution algébrique des équations entières* et il démontra l'impossibilité d'une telle résolution pour l'équation générale du 5e degré. On doit à Abel de nombreux théorèmes d'Analyse mathématique. En son honneur, l'expression *groupe abélien est synonyme de groupe commutatif.*

•**Pythagore** (569 ?-500 ? avant notre ère). Philosophe et mathématicien grec qui, le premier, semble-t-il, introduisit la **démonstration** en mathématiques, laquelle doit reposer d'une part sur **des axiomes**, d'autre part sur des **règles logiques**. Sa deuxième contribution aux mathématiques concerne sa « découverte » des nombres irrationnels (nombres qui ne sont pas le rapport, ou ratio, de deux entiers ; par exemple $\sqrt{2}$). Cette découverte détruisit ses théories mathématiques, physiques, métaphysiques et philosophiques dans lesquelles il affirmait : « tout l'univers repose sur les entiers naturels ».

6-3 1° $1 * 2 = 1 + 2 + 2 \cdot 1 = 5 \qquad (2 * 5) * 3 = 2 * (5 * 3) = 71.$

6° On obtient l'équation du second degré $4x^2 + 11x - 155 = 0.$

On trouvera une solution *unique* $x = 5.$

6-5 1° $(-2) \perp (1) = (-2)^2 + (1)^2 = 5.$

2° Commutative. Pas associative $\begin{cases} (a \perp b) \perp c = (a^2 + b^2)^2 + c^2 \\ a \perp (b \perp c) = a^2 + (b^2 + c^2)^2 \end{cases}$

4° $a^{(2)} = a \perp a = 2a^2 \qquad a^{(3)} = (2a^2) \perp a = 4a^4 = a^2 \ldots$

6-9 3° Les rationnels, sauf $-\frac{1}{2}$, sont symétrisables.

Le symétrique de a est $a' = \frac{-a}{2a+1}$.

4° On démontre la proposition contraire, c'est-à-dire

$$(a \perp b) = -\frac{1}{2} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

En effet $a \perp b = -\frac{1}{2} \Longleftrightarrow \left(a + 2ab + b = -\frac{1}{2}\right)$

Ce qui équivaut à :

$$4a + 4ab + 2b + 1 = 0 \quad \text{ou à} \quad 2a(2b + 1) + 2b + 1 = 0$$

soit $(2a + 1)(2b + 1) = 0.$

D'où la conclusion.

6-10 4° Même méthode qu'au 6-9 (4°).

6-11 1° Si $b \neq 0$ alors $a + b\sqrt{2} = 0$ implique $\frac{a}{b} = -\sqrt{2}$ et par suite $\frac{a^2}{b^2} = 2$. Désignons par $\frac{p}{q}$ la fraction *irréductible* équivalente à $\frac{a}{b}$. Alors $\frac{p^2}{q^2} = 2$, ce qui est impossible puisque $\left(\frac{p}{q}\right)^2$ est irréductible. Par suite $a + b\sqrt{2} = 0 \Longrightarrow b = 0$ d'où $a = 0$.

4° L'élément $(a + b\sqrt{2})$ est inversible, si et seulement si, il existe un couple (x, y) tel que $\begin{cases} ax + 2by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$

Si $a^2 - 2b^2 \neq 0$, on obtient $x = \frac{a}{a^2 - 2b^2}$ et $y = \frac{-b}{a^2 - 2b^2}$.

A quelle condition x et y sont-ils des entiers relatifs ?

Puisque $x^2(a^2 - 2b^2)^2 = a^2 \qquad y^2(a^2 - 2b^2)^2 = b^2$

alors $a^2 - 2b^2 = (a^2 - 2b^2)^2(x^2 - 2y^2)$

ou $1 = (a^2 - 2b^2)(x^2 - 2y^2)$.

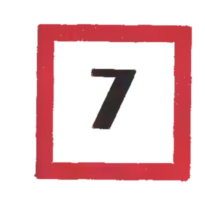
C'est-à-dire $(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \Longrightarrow a^2 - 2b^2 = \pm 1.$

La réciproque se démontre simplement.

6-13 On pourra faire le rapprochement entre $\mathfrak{T}(E)$ et les six isométries (dont l'identité; les trois symétries par rapport aux médiatrices des côtés; les rotations ayant pour centre, le « centre » du triangle) qui laissent invariant un triangle équilatéral.
Par exemple, f_4 est la symétrie par rapport à la médiatrice de BC.

6-17 3° Si a^{-1} est l'inverse de a (pour l'opération $\top$), l'élément neutre de $*$ est a^{-1}.

STRUCTURES : GROUPES, ANNEAUX, CORPS



● *Dans les classes antérieures, nous avons déjà rencontré des ensembles munis de lois de composition internes. Si l'ensemble et la loi possèdent certaines qualités, on définit ainsi une* **structure.** *Par exemple, en géométrie plane, l'ensemble* $\mathcal{T}$ *des translations, muni de la loi* $\circ$, *est un* **groupe commutatif** *(Classe de Seconde). De même, l'ensemble* $\mathbb{Z}$ *des entiers relatifs muni de l'addition et de la multiplication est un* **anneau commutatif.** *L'élève de la Classe Terminale A est donc déjà, en général, initié à la notion de* **structure** *qui, dégagée de toute signification « concrète » que peuvent revêtir les éléments de l'ensemble et la loi, ne retient que les « règles du jeu » et leurs conséquences. C'est pourquoi on les appelle parfois « structures abstraites ».*

● *Ces structures sont importantes par leur simplicité et par les résultats auxquels elles conduisent, résultats valables dans tous les cas où la même structure sera décelée.*

● *Dans cette leçon, nous définissons les structures principales : celles dont nous avons déjà rencontré des* **exemples** *ainsi que celles dont nous rencontrerons dans la suite du Cours un grand nombre de* **modèles.** *Elles sont regroupées ici afin que le lecteur puisse s'y reporter aisément. La connaissance de cette leçon permet donc une économie intellectuelle considérable.*

STRUCTURE DE GROUPE

1. DÉFINITION

EXEMPLES

❶ Soit $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs. Dans $\mathbb{Z}$ l'addition est une *opération interne*, *associative*. L'élément zéro est *neutre* pour l'addition et tout entier relatif est symétrisable. On dit que $(\mathbb{Z}, +)$ est un **groupe.** Puisque l'addition est commutative, le groupe est dit **commutatif** ou **abélien.**

❷ **L'ensemble $\mathbb{Q}^*$ des rationnels non nuls, muni de la loi $\times$,** est un groupe commutatif : le groupe multiplicatif des rationnels non nuls (d'élément neutre 1).

❸ Un exemple nouveau est celui de **l'ensemble $\mathcal{B}$ des bijections f d'un ensemble E sur lui-même, muni de la loi** $\circ$.

En effet :

La loi $\circ$ est associative dans $\mathcal{B}$.

La transformation identique 1_E, appartient à $\mathcal{B}$ et est élément neutre pour la loi $\circ$.

Quelle que soit la bijection f de E, la bijection réciproque f^{-1} est aussi une bijection de E et :

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = 1_E.$$

Le couple ($\mathcal{B}$, $\circ$) est appelé **groupe des substitutions** de E.

● DÉFINITIONS

— *Un ensemble* G, *muni d'une loi de composition interne* $*$, *a une* **structure de groupe** *si* :

1° **la loi $*$ est associative ;**
2° **il existe, dans G, un élément neutre pour la loi $*$;**
3° **pour tout élément x de G, il existe, dans G, un élément symétrique de x** (noté x' ou x^{-1}).

— Le groupe est le *couple* (G, $*$) vérifiant les conditions 1°, 2° et 3° ci-dessus. Si, de plus, la loi $*$ est commutative, le groupe (G, $*$) est dit *commutatif*, ou *abélien*.

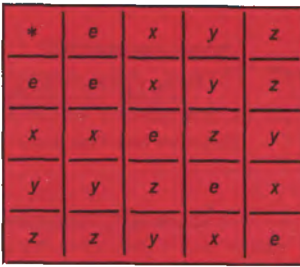
— Si (G, $*$) est un groupe et si G a un nombre fini d'éléments, n ($\in \mathbb{N}$), alors (G, $*$) est dit **groupe fini, d'ordre n.**

Pour un groupe fini, d'ordre **n** suffisamment petit, on peut dresser la **Table de composition.**

Par exemple, soit l'ensemble

$$E = \{e, x, y, z\},$$

muni de la loi de composition $*$, déterminée par le tableau ci-contre dans lequel le composé $x * y$ est l'élément situé à l'intersection de la colonne de x et de la ligne de y. On vérifiera que (E, $*$) est un groupe commutatif.



$*$	e	x	y	z
e	e	x	y	z
x	x	e	z	y
y	y	z	e	x
z	z	y	x	e



2. PROPRIÉTÉS

P₁ **Dans tout groupe, tout élément est régulier,** c'est-à-dire, **si** ($\mathcal{G}$, $*$) **est le groupe, quels que soit** a, x, y **appartenant à** $\mathcal{G}$ **alors :**

$$a * x = a * y \implies x = y$$

En effet : $\forall a \in \mathcal{G}$ $\exists a^{-1}$ tel que $a^{-1} * a = e$ (élément neutre de $\mathcal{G}$).
Donc $a * x = a * y \implies a^{-1} * (a * x) = a^{-1} * (a * y)$
Par associativité $(a^{-1} * a) * x = (a^{-1} * a) * y$
soit $e * x = e * y$. D'où $x = y$.

EXEMPLES

❶ Puisque $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe, quels que soient les nombres réels a, x, y alors

$$a + x = a + y \implies x = y$$

❷ Puisque $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe ($\mathbb{R}^*$, ensemble des réels, zéro exclu), alors quels que soient a, x, y **non nuls :** $a \times x = a . y \implies x = y$.

P₂ **Quels que soient les éléments *a* et *b* du groupe $(\mathcal{G}, *)$, il existe un élément unique *x* tel que $a * x = b$.**

❶ *S'il existe* x tel que $a * x = b$
alors $a^{-1} * (a * x) = a^{-1} * b$
Par associativité $(a^{-1} * a) * x = a^{-1} * b$
et $x = a^{-1} * b$.

❷ *Réciproquement*,
$a * x = a * (a^{-1} * b) = (a * a^{-1}) * b = b$. D'où la propriété.

CONSÉQUENCES

❶ Dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, l'équation $a + x = b$ a une solution unique $x = -a + b$.
Solution que l'on écrit $b + (-a)$ ou $(b - a)$ grâce à la commutativité.

❷ Dans $\mathbb{R}^*$, l'équation $a \times x = b$ a une solution unique $x = \frac{1}{a} \times b$ notée, grâce à la commutativité $x = \frac{b}{a}$.

P₃ **Quel que soit l'élément a fixé, l'application f_a de $(\mathcal{G}, *)$ vers $\mathcal{G}$ telle que $f_a(x) = a * x$ est une bijection de $\mathcal{G}$.**

En effet, d'après **P₁** l'application f_a est injective et d'après **P₂**, elle est surjective.

Il en résulte que si $(\mathcal{G}, *)$ est un groupe *fini*, toute ligne (et toute colonne) de la Table de composition est formée des éléments de $\mathcal{G}$, chacun une fois.

STRUCTURE D'ANNEAU

3. DÉFINITION

EXEMPLES

❶ Soit $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs. Nous savons que $(\mathbb{Z}, +)$ est un anneau commutatif.

De plus, la multiplication est une opération interne à $\mathbb{Z}$, *associative* et *distributive sur l'addition*. Pour résumer cela, on dit que $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un **anneau.**

Puisque la multiplication est commutative, l'anneau est dit *commutatif.*

Puisqu'il existe un élément neutre, 1, — appelé élément *unité* —, pour la multiplication on dit que l'anneau est *unitaire.*

❷ *Soit* $\mathfrak{P}$(E) *l'ensemble des parties d'un ensemble* E.

Désignons par { Δ : l'opération « prendre la différence symétrique »;
$\cap$: l'opération « prendre l'intersection ».

On démontre que :

— ($\mathfrak{P}$, (E), Δ)*est un groupe commutatif* (d'élément neutre $\varnothing$;l'opposé de X est X lui-même) ;

— la loi $\cap$ est *associative* ;

— la loi $\cap$ est *distributive* sur Δ ;

On résume cela en disant que ($\mathfrak{P}$ (E), Δ, $\cap$) est un *anneau.*

De plus, la loi $\cap$ est commutative et E est élément unité (pour $\cap$). Donc ($\mathfrak{P}$ (E), Δ, $\cap$) est un **anneau unitaire** appelé **anneau de Boole.**

• DÉFINITIONS



— *Un ensemble A muni de deux lois de composition internes, l'une notée + (appelée addition), l'autre notée · (appelée multiplication), a une* **structure d'anneau** *si* :

1° **(A, +) est un groupe commutatif** (l'élément neutre, noté 0, est appelé *élément nul*) ;
2° **la loi • est associative ;**
3° **la loi • est distributive pour la loi +**

— L'anneau est le *triplet* (A, +, •) vérifiant les conditions 1°, 2°, 3°.

— Si, de plus, la loi • est commutative, l'anneau est *commutatif.*

En outre, s'il existe un élément neutre pour la loi •, l'anneau est dit *unitaire* (l'élément neutre, noté *e* ou 1, est appelé *élément unité*).

REMARQUES

1. Le symétrique d'un élément a (pour la loi $+$) est appelé **opposé** de a et noté $(-a)$ (lire « moins a »).
2. Le symétrique de a pour la loi $\bullet$, **s'il existe,** est appelé **inverse** de a et noté a^{-1}.
3. Par convention, $(a \cdot b) + (a \cdot c)$, sera noté $a \cdot b + a \cdot c$, sans parenthèses.

4. PROPRIÉTÉS

P_1 **Dans tout anneau, quel que soit a :** $\mathbf{a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0}$

Cela résulte de la distributivité de la loi $\cdot$ pour la loi $+$.
Démontrons, par exemple, que $a \cdot 0 = 0$.

En effet : $\forall a, \forall b, \quad a \cdot (b + 0) = a \cdot b + a \cdot 0$

$$a \cdot b = a \cdot b + a \cdot 0.$$

Et, puisque tout élément est régulier pour la loi $+$ (§ 2) : $\quad 0 = a \cdot 0.$

P_2 **Dans tout anneau, quels que soient a et b :** $\mathbf{a \cdot (-b) = -(ab)}$

De $b + (-b) = 0$, on déduit :

$a \cdot [b + (-b)] = 0 \quad$ (propriété ci-dessus)

et $\quad a \cdot [b + (-b)] = a \cdot b + a \cdot (-b) \quad$ (distributivité).

Il en résulte que $a \cdot (-b)$ est l'opposé de ab.

• DIVISEURS DE ZÉRO

EXEMPLE

Soit A un élément de l'anneau de Boole $[\mathfrak{P}(E), \Delta, \cap]$. Supposons $A \neq \varnothing$ et $A \neq E$. Bien que A et ^{C}A soient différents de $\varnothing$, on obtient $A \cap {}^{C}A = \varnothing$. Les éléments A et ^{C}A sont appelés **diviseurs de zéro.**

DÉFINITION



Dans un anneau, si : $a \neq 0, b \neq 0$ **et** $ab = 0$

les éléments a et b sont dits **diviseurs de zéro.**

Ainsi, dans un anneau, $\quad a \cdot b = 0 \quad \not\Longrightarrow \quad (a = 0 \text{ ou } b = 0)$

Un anneau sans diviseur de zéro est dit **anneau intègre.**

STRUCTURE DE CORPS

5. DÉFINITION

● *Un ensemble* K, *muni de deux lois de composition internes, l'une notée* + (*appelée addition*), *l'autre notée* • (*appelée multiplication*), *a une* **structure de corps** *si* :

1° **(K, +, •) est un anneau unitaire ;**
2° **tout élément de $K_* = K - \{0\}$ est inversible (pour la loi ·).**

Puisque K_* est l'ensemble des éléments inversibles, ces conditions équivalent aux suivantes :

(K, +, •) est un anneau unitaire,
(K^*, •) est un groupe multiplicatif (§ 2).

Le corps est le *triplet* (K, +, •) vérifiant les conditions 1° et 2°.
Si, de plus, *la loi · est commutative*, le corps (K, +, •) est dit *commutatif.*

EXEMPLES

❶ **L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels,** muni des lois + et •, est un **corps commutatif.**

❷ **L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels,** muni des lois + et •, est un **corps commutatif.**

6. PROPRIÉTÉS

● Tout corps étant un anneau, les propriétés P_1 et P_2 (§ 4) sont valables dans un corps.
● Mais, de plus, *dans tout corps* K :

P_3 L'égalité $ab = 0$ implique $a = 0$ ou $b = 0$

Soit $a \cdot b = 0$. Et supposons $a \neq 0$.
Alors a est inversible ; multiplions à gauche par a^{-1} :

$$a^{-1} \cdot (ab) = a^{-1} \cdot 0. \quad (1)$$

Or $a^{-1} \cdot (ab) = (a^{-1} \cdot a) \cdot b = b$ (Associativité de la loi ·)

et, d'après P_1, $(a^{-1} \cdot 0) = 0$. Donc la relation (1) implique $b = 0$.

P_4 Quel que soit $a \in K^*$ et quel que soit $b \in K$, il existe un élément $x \in K$, unique, tel que :

$$a \cdot x + b = 0$$

En effet : $ax + b = 0 \iff ax = -b$ [dans le groupe (K, +)]
$\iff x = a^{-1} \cdot (-b)$ (puisque a est inversible).

● CONSÉQUENCES

❶ Dans l'ensemble des réels, l'équation $ax + b = 0$ avec $a \neq 0$, a une racine unique notée $x = -\frac{b}{a}$.

❷ Dans tout corps, la relation $a \cdot x = a \cdot y \iff \begin{cases} a = 0 \\ x = y \end{cases}$

En effet, $ax = ay \iff ax - ay = 0$.
Ce qui équivaut à $a \,.\, (x - y) = 0$.
Relation vérifiée pour $a = 0$ ou $x - y = 0$. La réciproque se déduit de **P_3**.



EXERCICES

7-1 Démontrer que ($\mathfrak{T}$(E), Δ, ∩) est un anneau unitaire non intègre (§ 3).

7-2 Pour souligner le fait qu'un groupe est un couple (G, $*$), montrons que, sur un même ensemble G, on peut définir plusieurs structures de groupe.

Soit (G, ·) un groupe dont la loi est notée multiplicativement ; 1 l'élément neutre, x^{-1} l'inverse de x, et a un élément fixe de G ;

Définissons, dans G, la loi $*$ par : $x * y = x \cdot a \cdot y$.

1° Démontrer que (G, $*$) est un groupe ; déterminer son élément neutre, e, et le symétrique x' de x pour la loi $*$.

2° Si u et v sont deux éléments de E, exprimer, à l'aide de la loi · seulement, l'élément x de E tel que : $u * x = v$.

7-3 Dans un groupe non commutatif (G, $*$), a, b, c étant les éléments donnés, e l'élément neutre, a^{-1} le symétrique de a, déterminer les éléments x de G vérifiant :

1° $x * a * b = c * b$

2° $a * x * b = b * c$.

7-4 Soit (G, $*$) un groupe non commutatif (on désigne par a^{-1} le symétrique de a).
Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie dans G par :

$$x \mathcal{R} y \iff (\exists\, s \in G \text{ tel que } y = s * x * s^{-1})$$

1° Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans G.

2° Soit a un élément de G qui commute avec tous les éléments de G. Quelle est la classe de a modulo $\mathcal{R}$?

7-5 Soit (G, $*$) un groupe (on désigne par x^{-1} le symétrique de l'élément x).

1° Démontrer que $(x * y)$ a pour symétrique $y^{-1} * x^{-1}$.

2° Soit H un sous-ensemble de G. Démontrer que la restriction de $*$ à H munit cet ensemble d'une structure de groupe, si et seulement si :

$$\begin{cases} H \neq \emptyset ; \\ \text{et} \\ \forall x \in A \quad \forall y \in H \quad x * y^{-1} \in H \end{cases}$$

3° Soit H une partie de G vérifiant la condition ci-dessus. On définit, dans G une relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\alpha \mathcal{R} \beta \iff [\alpha * \beta^{-1} \in H].$$

Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans G.

7-6 Etablir que, dans un anneau (A, $+$, $\cdot$) :

$$\forall (x, y, z) \in A \times A \times A, \qquad x \cdot (y - z) = (x \cdot y) - (x \cdot z)$$

7-7 Montrer que, dans un anneau (ou un corps) la formule :

$$(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - y^2$$

n'est valable que si l'anneau (ou le corps) est commutatif.

7-8 Dans un anneau (A, $+$, $\cdot$) non commutatif, on pose : $x * y = xy - yx$. Calculer :

$$x * (y * z) + y * (z * x) + z * (x * y).$$

7-9 Soit E l'ensemble des entiers relatifs pairs $E = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$.

1° On définit, dans E, une opération $*$ par $a * b = a + b$ (le signe $+$ désignant l'addition dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs).

Calculer $-4 * 0$; $-4 * 2$.

Quelle est la structure (E, $*$) ?

2° Dans le produit cartésien $\mathbb{Z} \times E$, on définit un opération T par :

$$\forall (a, c) \in \mathbb{Z}^2 \qquad \forall (b, d) \in E^2 \qquad (a, b) \mathrm{T} (c, d) = (a + c, b + d).$$

Calculer $(3, -2) \mathrm{T} (1, 2)$; $(-3, 4) \mathrm{T} (4, -2)$.

Quelle est la structure ($\mathbb{Z} \times E$, T) ? Quel est le symétrique de (a, b) ?

7-10 Soit $E = \{a, b\}$. On définit dans E, les deux opérations $+$ et . par les Tables ci-dessous :

+	*a*	*b*
a	*a*	*b*
b	*a*	*a*

·	*a*	*b*
a	*a*	*a*
b	*a*	*b*

Quelle est la structure (E, $+$, $\cdot$) ?

7-11 Soit A l'ensemble des nombres réels de la forme $a + b\sqrt{2}$ avec a et b entiers relatifs.

1° Démontrer que $a + b\sqrt{2} = 0 \Longrightarrow a = b = 0$.

En déduire que $a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2}$ implique $a = a'$ et $b = b'$.

2° Dans A, on définit l'addition $\dot{+}$ et la multiplication $\dot{\times}$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} (a_1 + b_1\sqrt{2}) \dot{+} (a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{2} \\ (a_1 + b_1\sqrt{2}) \dot{\times} (a_2 + b_2\sqrt{2}) = a_1a_2 + 2b_1b_2 + (a_1b_2 + (a_1b_2 + b_1a_2)\sqrt{2} \end{cases}$$

Calculer $(-2 \dot{+} 3\sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2})$ et $-(2 + 3\sqrt{2}) \dot{\times} (1 - \sqrt{2})$.

Démontrer que $(A, \dot{+}, \dot{\times})$ est un anneau commutatif unitaire.

Existe-t-il des diviseurs de zéro ?

3° Démontrer que l'ensemble J des éléments $x + y\sqrt{2}$ inversibles est caractérisé par la relation $x^2 - 2y^2 = \pm 1$.

$1 + \sqrt{2}$ est-il inversible ? Dans l'affirmative, quel est son inverse ?

7-12 Soit C l'ensemble des nombres réels de la forme $\alpha + \beta\sqrt{2}$ avec α et β nombres rationnels.

Reprendre les questions de l'exercice précédent et en conclure que $(C, \dot{+}, \dot{\times})$ est un corps commutatif.

7-13 Soit $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, \ldots\}$.

1° On définit, dans $\mathbb{Z}$, la relation $\mathcal{R}$ par

$$x \,\mathcal{R}\, y \Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} \quad \text{tel que} \quad x - y = 6\,k.$$

A-t-on $(-5) \,\mathcal{R}\, (2)$? $(-17) \,\mathcal{R}\, (-5)$?

Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2° Définir les classes d'équivalence (on désignera par $\dot{x}$ la classe de x).

3° Soit A l'ensemble de ces classes. Quel est leur nombre ?

Démontrer que si x décrit la classe $\in a$ et y décrit la classe $\in b$, alors $x + y$ appartient à une classe bien déterminée, notée $\dot{a} \dot{+} \dot{b}$.

Quelle est la classe de $(-17) + (-5)$?

De même, xy appartient à une classe bien déterminée notée $\dot{a} \dot{\times} \dot{b}$.

Quelle est la classe de -17×-5 ?

4° Démontrer que $(A, \dot{+}, \dot{\times})$ est un anneau commutatif unitaire.
Quels sont les diviseurs de zéro ?

7-14 Même exercice que le précédent.

La relation $\mathcal{R}$ est telle que $x \,\mathcal{R}\, y$ implique : « il existe un entier relatif k tel que $x - y = 5k$ ».

Si C est l'ensemble des classes d'équivalence, on démontrera que $(C, \dot{+}, \dot{\times})$ est un corps commutatif.



• **Boole** (George) né le 2 novembre 1815 à Lincoln, mort le 8 décembre 1864. L'un des plus originaux mathématiciens anglais. Fut, par ses travaux sur le calcul des propositions, le créateur de la *logique mathématique*.

• **Galois** (Evariste) né le 25 octobre 1811 à Bourg-la-Reine, près de Paris, mort le 31 mai 1832 à Paris.

Génial mathématicien qui, dans le testament rédigé durant la nuit qui précéda le duel où il trouva la mort, résuma en une soixantaine de pages impérissables, ses découvertes sur la théorie des équations entières, découvertes qui dégageaient les grandes idées de la **théorie des groupes**. En un certain sens, Galois est le fondateur de l'Algèbre moderne.

7-2 1° Si le symétrique, à droite, x' de x existe, alors $x * x' = a^{-1} = x \cdot a \cdot x'$. De $x \cdot a \cdot x' = a^{-1}$, on obtient, en multipliant à gauche par x^{-1}, . . ., puis en multipliant à gauche par a^{-1}, . . .

Donc le symétrique x' à droite ne peut être que $a^{-1} \cdot x^{-1} \cdot a^{-1}$. Il reste à vérifier qu'il est symétrique à gauche...

2° *Réponse*. $x = a^{-1} \cdot u^{-1} \cdot v$.

7-4 2° $a = \{ a \}$.

7-5 2° *Première partie*. Hypothèse : (H, $*$) est un groupe.

Alors $\forall\ y \in \text{H} \Longrightarrow y^{-1} \in \text{H}$.

D'autre part, la loi $*$ étant *interne* : $x \in \text{H}$ et $y^{-1} \in \text{H}$ impliquent $x * y^{-1} \in \text{H}$.

Réciproque. Hypothèses : voir énoncé.

Puisque $\text{H} \neq \varnothing$, il existe au moins un élément $x \in \text{H}$.

— Alors $(x \in \text{H}$ et $x \in \text{H}) \Longrightarrow (x * x^{-1} \in \text{H})$.

Donc l'élément neutre e de G appartient à H.

— Or $(e \in \text{H}$ et $y \in \text{H}) \Longrightarrow (e * y^{-1} \in \text{H})$.

Tout élément y de H admet donc un symétrique dans H.

— la loi $*$ est associative car...

— la loi $*$ est interne à H car :

$(x \in \text{H}$ et $y \in \text{H}) \Longrightarrow (x \in \text{H}$ et $y^{-1} \in \text{H}) \Longrightarrow (x * [y^{-1}]^{-1} \in \text{H})$

soit $x * y \in \text{H}$.

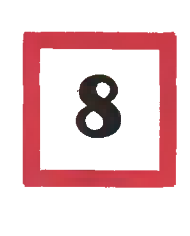
7-8 *Réponse* : 0.

7-9 1° (E, $*$) est un groupe commutatif.

2° $(\mathbb{Z} \times \text{E}, \top)$ est un groupe commutatif.

7-11 1° Si $b \neq 0$, $a + b\sqrt{2} = 0$ implique $-\dfrac{a}{b} = \sqrt{2}$. Or il n'existe pas de « fraction » égale à $\sqrt{2}$. Donc l'hypothèse $b \neq 0$ est à rejeter. Si $b = 0$, alors...

STRUCTURES D'ORDRE



● *Parmi les relations binaires dans un ensemble, nous avons défini, dans la 4[e] leçon (§ 9), les* **relations d'ordre.** *Puis, dans la 7[e] leçon, nous avons caractérisé les qualités d'un ensemble muni d'une (ou plusieurs) loi de composition, en définissant des structures.*

● *Dans cette leçon, après avoir défini des éléments remarquables, pouvant exister ou non, dans un ensemble muni d'une relation d'ordre (ensemble ordonné), nous caractériserons les propriétés de tels ensembles et définirons des* **structures d'ordre.**

Nous illustrons ces notions par l'étude de la relation d'ordre $\leqslant$ dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ; cela est, à nouveau, l'occasion de rappeler et de préciser des propriétés dont la connaissance est indispensable.

ENSEMBLES ORDONNÉS

1. PARTIES REMARQUABLES

Soit E un ensemble. Soit une relation d'ordre, notée $\preccurlyeq$, définie sur E. On dit que E est ordonné par la relation $\preccurlyeq$.
Soit a et b deux éléments de E tels que $a \preccurlyeq b$.

● **DÉFINITION**

Le **segment** ou intervalle fermé a, b, est l'ensemble des éléments x de E tels que $a \preccurlyeq x$ et $x \preccurlyeq b$. On le note $[a, b]$.

Donc : $$[a, b] = \{x ; \quad x \in E, \quad a \preccurlyeq x \preccurlyeq b\}$$

2. ÉLÉMENTS REMARQUABLES

Soit A une partie de l'ensemble E ordonné par la relation notée $\preccurlyeq$.

DÉFINITION

L'élément **m** est un **majorant** de A si : $\begin{cases} m \in E \\ \text{et} \quad \forall x \in A, \quad x \prec m. \end{cases}$

Si l'ensemble M des majorants de A n'est pas vide, la partie A est dite *majorée*.

L'élément **m** est un **minorant** de A si : $\begin{cases} m' \in E \\ \text{et} \quad \forall x \in A, \quad m' \prec x. \end{cases}$

Si l'ensemble M' des minorants de A n'est pas vide, la partie A est dite *minorée*.

L'élément **g** est **plus grand élément** de A si : $\begin{cases} g \in A \\ \text{et} \quad \forall x \in A, \quad x \prec g. \end{cases}$

L'élément **p** est **plus petit élément** de A si : $\begin{cases} p \in A \\ \text{et} \quad \forall x \in A, \quad p \prec x, \end{cases}$

L'élément **s** est **borne supérieure** (ou **suprémum**) de A si *s* est le plus petit élément de l'ensemble M des majorants de A.
L'élément **i** est **borne inférieure** (ou **infimum**) de A si *i* est le plus grand élément de l'ensemble M' des minorants de A.

PROPRIÉTÉS

P₁ *Si la partie* A *a un plus grand élément* **g**, *cet élément est unique.*

En effet, si **g**' est aussi plus grand élément de A :

$$(g \prec g' \quad \text{et} \quad g' \prec g) \quad \text{implique} \quad g' = g.$$

P₂ *De même, si* A *a un plus petit élément, celui-ci est unique.* Par suite *si la* borne supérieure (ou la borne inférieure) de A existe, elle est unique.

P₃ *Si* A *possède un plus grand élément* **g**, *alors* **g** *est borne supérieure de* A.

En effet : **g** est un majorant de A car :

$$\forall x \in A, x \prec g ;$$

de plus, si **m** est un majorant de A, alors : $g \in A$ implique $g \prec m$.
Donc **g** est le plus petit élément de l'ensemble des majorants.

EXEMPLE

Dans $\mathbb{N}^*$ ordonné par la relation | (divise), la partie $A = \{4, 8, 12\}$ a pour ensemble des majorants : $M = \{24, 48, 72, \ldots, k. 24, \ldots\}$ et pour ensemble des minorants : $M' = \{1, 2, 4.\}$
La partie A *n'a pas de plus grand élément* (il s'agit de la relation |), mais *elle a une borne supérieure* : 24.
La partie A *a un plus petit élément* : 4 (car 4|4 ; 4|8 et 4|12), qui est aussi la *borne inférieure de* A.

3. STRUCTURES REMARQUABLES

1° CHAINES

*Une **chaîne** est une partie totalement ordonnée d'un ensemble ordonné.*

Par exemple, $\mathbb{N}$ muni de la relation d'ordre $\leqslant$ est une chaîne.

2° TREILLIS

EXEMPLE

Considérons, dans l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ des parties d'un ensemble E, la relation d'inclusion $\subset$; et soient A et B deux éléments quelconques de $\mathfrak{P}(E)$.

❶ **La partie $\{A, B\}$ de $\mathfrak{P}(E)$ a une borne supérieure** qui est **$A \cup B$.**
En effet, $A \cup B$ est un majorant de $\{A, B\}$ puisque :

$$A \subset (A \cup B) \quad \text{et} \quad B \subset (A \cup B).$$

Et si M est un majorant de $\{A, B\}$, alors :

$$(A \subset M \quad \text{et} \quad B \subset M) \quad \text{implique} \quad (A \cup B \subset M).$$

❷ De même $\{A, B\}$ **a une borne inférieure,** qui est $A \cap B$.
Ainsi, toute partie de deux éléments de $\mathfrak{P}(E)$ a une borne supérieure et une borne inférieure.



• DÉFINITION

On appelle **treillis,** *tout ensemble ordonné* (T) *tel que, pour toute paire d'éléments de* (T), *il existe une borne supérieure et une borne inférieure.*

La borne supérieure de $\{x, y\}$ est notée $x \vee y$ qui se lit « x *sup* y ».

La borne inférieure de $\{x, y\}$ est notée $x \wedge y$ qui se lit « x *inf* y ».

EXEMPLES

❶ $\mathfrak{P}(E)$ ordonné par l'inclusion $\subset$ est un treillis.

❷ Des propriétés du p.g.c.d. et du p.p.c.m. il résulte, que $\mathbb{N}^*$, ordonné par la relation | (divise), est un treillis, et que :

$x \vee y$ est le *plus petit commun multiple de* x et y.
$x \wedge y$ est le *plus grand commun diviseur de* x et y.



3° SIMPLEXES

Nous avons démontré ci-dessus que l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ des parties d'un ensemble E est un **treillis** pour la relation d'inclusion. Si l'ensemble E est **fini,** on pose la définition suivante :

On appelle **simplexe** $\mathfrak{T}_n$ d'un ensemble E_n, fini, de **n** éléments, le treillis ($\mathfrak{T}(E_n)$, $\subset$), c'est-à-dire *la structure définie dans l'ensemble* $\mathfrak{T}(E_n)$ *par l'inclusion.*

La figure 1 représente le simplexe $\mathfrak{T}_4$ d'un ensemble de 4 éléments. Chaque « trait » ascendant (plein, pointillé ou tireté) joignant un sous-ensemble E_p situé au niveau p à un sous-ensemble E_{p+1} situé au niveau $p+1$ traduit l'inclusion de E_p dans E_{p+1}.

Sur la figure 1, et dans le sens ascendant :

les traits pointillés	....	indiquent	l'adjonction	de l'élément	*a* ;
les traits pleins forts	——	—	—	—	*b* ;
les traits tiretés	- - - -	—	—	—	*c* ;
les traits fins	——	—	—	—	*d*.

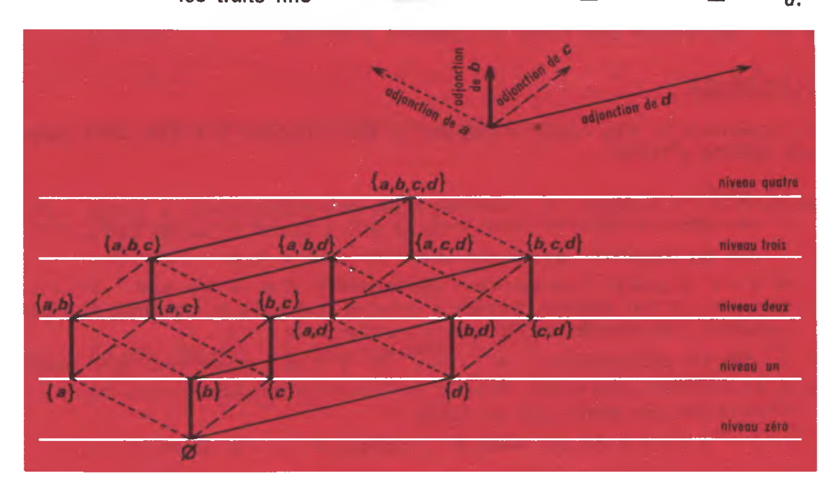


Fig. 1.

L'ENSEMBLE $\mathbb{R}$ *ORDONNÉ PAR LA RELATION* $\leqslant$

4. RELATION D'ORDRE $\leqslant$ DANS $\mathbb{R}$

• DÉFINITION

Etant donné deux nombres réels **x** *et* **y**, *on dit que* **x est inférieur ou égal à y** *s'il existe un réel positif* **u** *tel que :* $x + u = y$

On dit parfois **x est inférieur, au sens large, à y** ou plus simplement, mais avec le même sens, **x** *est inférieur* à **y**.

On note « **x** inférieur à **y** » par $x \leqslant y$

Donc : $x \leqslant y \iff \exists u \in \mathbb{R}^+ \quad x + u = y$

La relation réciproque se lit « **y** *est supérieur à* **x** » et se note $y \geqslant x$.
On dit que **x est strictement inférieur à y** si $x \leqslant y$ et $x \neq y$.

On note « *x strictement inférieur à y* » par $x < y$

Donc : $x < y \iff \exists u \in \mathbb{R}^{+*} \quad x + u = y$

($\mathbb{R}^{+*}$ est l'ensemble des réels strictement positifs).

• THÉORÈME

Dans l'ensemble $\mathbb{R}$ *des réels, la relation « être inférieur à »* (au sens large) *est une relation d'ordre.*

En effet :

❶ *La relation est réflexive :* pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + 0 = x$ implique $x \leqslant x$.

❷ *Elle est transitive :* quels que soient les réels x, y, z,
si $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$, il existe deux *réels positifs* u et v tels que : $x + u = y$ et $y + v = z$. Par addition membre à membre et d'après la régularité de y pour l'addition, il en résulte : $x + (u + v) = z$ et par suite $x \leqslant z$.

❸ *Elle est antisymétrique* : si $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$, il existe deux *réels positifs*, u et v tels que $x + u = y$ et $y + v = x$.
Il en résulte, de même que ci-dessus :

$u + v = 0$, ce qui, dans $\mathbb{R}^+$, implique $u = v = 0$. Donc $x = y$.

• PROPRIÉTÉS DE LA STRUCTURE ($\mathbb{R}$, $\leqslant$).

Dans ($\mathbb{R}$, $\leqslant$) : *il n'existe ni plus petit élément ; ni plus grand élément ; l'ordre défini par* $\leqslant$ *est un ordre total* (c'est-à-dire que ($\mathbb{R}$, $\leqslant$) est une *chaîne*).

6. RELATION D'ORDRE ET OPÉRATION DANS $\mathbb{R}$



P_1 **Dans $\mathbb{R}$, la relation $\leqslant$ est compatible avec la loi $+$, c'est-à-dire :**

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant y \implies x + z \leqslant y + z$$

En effet, $x + u = y$ implique $x + u + z = y + z$ et, d'après les propriétés de l'addition, $(x + z) + u = y + z$; donc $x + z \leqslant y + z$.

CONSEQUENCES

❶ **L'application f_a de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $x \overset{f_a}{\longmapsto} f_a(x) = a + x$ est croissante.**

En effet : $(x \leqslant x') \Longrightarrow (a + x \leqslant a + x')$

❷ **On peut « ajouter membre à membre deux inégalités de même sens »** c'est-à-dire que, **quels que soient les réels x, y, x', y' :**

$$x \leqslant x' \text{ et } y \leqslant y' \Longrightarrow x + y \leqslant x' + y'$$

En effet :

$$(x \leqslant x' \quad \text{et} \quad y \leqslant y') \Longrightarrow (x + y \leqslant x' + y \quad \text{et} \quad x' + y \leqslant x' + y')$$

d'où le résultat, par transitivité de la relation $\leqslant$.

P₂ **Dans $\mathbb{R}^+$ (ensemble des réels positifs), la relation $\leqslant$ est compatible avec la loi $\times$,** c'est-à-dire que :



$$\forall z \in \mathbb{R}^+ \quad x \leqslant y \Longrightarrow x \cdot z \leqslant y \cdot z$$

En effet l'égalité $x + u = y$ implique $(x + u) \,.\, z = y \,.\, z$.

D'où par distributivité de la loi $\times$ pour $+$: $xz + uz = yz$; donc $x \,.\, z \leqslant y \,.\, z$

CONSEQUENCES

❶ Si a est positif, l'application g_a de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $x \overset{g_a}{\longmapsto} g_a(x) = a \cdot x$. **est croissante.**

❷ Si $z \in \mathbb{R}^-$, alors $x \leqslant y \Longrightarrow yz \leqslant xz$.

En effet $x \leqslant y \Longrightarrow \exists\, u \in \mathbb{R}^+$ tel que $x + u = y$.

Or $x + u = y$ implique $(x + u) \,.\, z = y \,.\, z$.

Par distributivité de $\times$ sur $+$: $x \,.\, z + u \,.\, z = y \,.\, z$.

Or : $(z \in \mathbb{R}^- \quad \text{et} \quad u \in \mathbb{R}^+) \Longrightarrow (uz \in \mathbb{R}^-)$

Par suite $xz = yz + v$ avec $v \in \mathbb{R}^+$.

Donc $yz \leqslant xz$.



EXERCICES

8-1 Dans $\mathbb{N}^*$ ordonné par la relation « *divise* », on considère les sous-ensembles :

$$A = \{4, 8, 12\} \quad \text{et} \quad B = \{2, 3, 4, 5\}$$

Former, pour A et B, les éléments suivants (s'ils existent) :

1° Le plus grand élément et le plus petit élément.

2° Un majorant et l'ensemble des minorants.

3° La borne supérieure et la borne inférieure.

8-2 Dans $\mathbb{Q}$, ensemble des nombres rationnels ordonné par la relation $\leqslant$, on considère le sous-ensemble A tel que $A = \left\{ \frac{1}{2^n} ; n \in \mathbb{N} \right\}$.

Déterminer les mêmes éléments que dans l'exercice 8-1.

8-3 Dans un plan P rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne la relation $\mathcal{R}$ définie par :

$$m \mathcal{R} m' \iff \begin{cases} x \leqslant x' \\ y \leqslant y' \end{cases} \qquad [\text{avec } m = (x, y)]$$

1° $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'ordre ?

2° Soit $m = (x, y)$ et $m' = (x', y')$ et la partie $A = \{m, m'\}$ de P.
Représenter graphiquement l'ensemble des majorants de A et l'ensemble des minorants de A.

8-4 Soit un treillis T ordonné par $\prec$.

1° Etablir que :

$$a \vee b = a \implies b \prec a$$
$$a \wedge b = a \implies a \prec b$$
$$a \wedge b = a \iff a \vee b = b$$

2° Démontrer que :

$$\forall a, \forall b, \quad a \vee (a \wedge b) = a$$
$$\forall a, \forall b, \quad a \wedge (a \vee b) = a$$

8-5 Dans un ensemble E une partie A ayant une borne supérieure s a-t-elle un plus grand élément ?

8-6 On ordonne un jeu de 52 cartes suivant les valeurs qu'elles ont au jeu de bridge avec « atout carreau ».

1° Existe-t-il un plus grand élément ?

2° Existe-t-il un plus petit élément ? Quelles sont les cartes telles qu'il n'existe pas de cartes « inférieures » ?

8-7 Soit $\mathcal{L}$ une partie de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E (les éléments de $\mathcal{L}$ sont donc des parties de E). On suppose que : $E \in \mathcal{L}$ et que pour toute partie, non vide, $\mathcal{M}$, de $\mathcal{L}$, l'intersection des éléments de $\mathcal{M}$ est élément de $\mathcal{L}$. Démontrer que $\mathcal{L}$, ordonné par l'inclusion, est un treillis.

8-8 Dans un tableau carré sont disposés les éléments d'un ensemble totalement ordonné.

Soit a'_i le plus grand élément de la ligne i et a' le plus petit élément de l'ensemble de a'_i.

Soit a''_j le plus petit élément de la colonne j et a'' le plus grand élément de l'ensemble de a''_j.

Comparer a' et a''.

8-9 Soit $E = A \times B$ le produit cartésien de $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ et $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Quels que soient les éléments (x, y) et (x', y'), de E on pose :

$$(x, y) \prec (x', y') \iff \begin{cases} x \leqslant x' \\ \text{et} \\ y \leqslant y' \end{cases}$$

1° Définir $(2, 3) \wedge (0, 1)$ et $(2, 3) \vee (0, 1)$.

2° Démontrer que $(E, \prec)$ a une structure de treillis.

8-10 Soit E un ensemble fini.

1° Etant donné deux *partitions* P_1 et P_2 de E, on dit que P_1 est *plus fine* que P_2 (noté $P_1 \prec P_2$) si toute *classe* de P_1 est incluse dans une classe de P_2.

Démontrer que la relation $\prec$ est une relation d'ordre entre les partitions de E. Quelle est la plus fine des partitions ? la moins fine de toutes ?

Application. Soit P_1 et P_2 les deux partitions de $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$ suivantes :

$P_1 =$ | ace | bfg | dhij | k | et $P_2 =$ | acdeijh | bfgk |

Comparer P_1 et P_2.

2° Etant donné deux partitions P et Q, démontrer que l'ensemble des intersections non vides des classes de P et Q est une partition I de E (notée $I = P \wedge Q$). Démontrer que $I = \inf(P, Q)$, pour la relation $\prec$.

Application. Définir | afh | ce | dg | b | $\wedge$ | af | ed | gb | c | h |

3° Deux éléments de E sont *voisins* pour les partitions P et Q s'ils appartiennent à une même classe de P ou de Q ; deux éléments de E sont dits *parents* s'ils sont voisins ou s'ils sont l'un et l'autre parents d'un même troisième (on note $x \sim y$). Démontrer que la relation « être parent » est une relation d'équivalence.

On appelle *union* de P et Q (notée $U = P \vee Q$), la partition de E associée à cette relation d'équivalence. Démontrer que $U = \text{Sup}(P, Q)$ pour la relation $\prec$.

Application. Définir 
| afh | ce | dg | b | $\vee$ | af | ed | gb | c | h |



INDICATIONS

8-4 Il suffit d'appliquer la définition de $\vee$ (§ 3).

8-5 Il suffit de donner un contre-exemple.
Ainsi $E = \mathbb{Q}$, ordonné par $\leqslant$ et $A = \{ x ; x = 1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \}$.

8-7 Soit A et B deux éléments de $\mathfrak{L}$. Que dire de $A \cap B$? Que dire de E ?

8-8 a' appartient à une ligne L dont il est l'élément a'_l.

a'' appartient à une colonne C dont il est l'élément a''_j.
Soit $\{ a \} = L \cap C$, ...
(Intuitivement, on peut penser à des personnes rangées en lignes et colonnes, et dont on compare la *taille* (supposée inégale). Alors a'_i est la personne de plus grande taille dans la ligne i et a' est le « plus petit » des « plus grands »...).

8-10 1° Les classes d'une partition sont les parties, deux à deux disjointes et non vides, dont la réunion est E.
La partition la plus fine est celle qui comprend un élément par classe.
Application : $P_1 \prec P_2$.
2° Toute classe de I est incluse dans ..., par suite...
I est un minorant de P et Q. C'est le plus grand, car... (raisonnement par l'absurde).

Application : I =

af	*b*	*c*	*d*	*e*	*g*	*h*

3° *Application* : U =

afh	*cegdb*

NOMBRES CARDINAUX



● *Bien que ne figurant pas au programme de la classe de Terminale A, la notion de* **nombre entier** *est indispensable en mathématique et dans la vie courante.*

Aussi allons-nous montrer, dans cette leçon, comment la notion de **bijection** *(Cf. 5ᵉ leçon) conduit simplement à celle de* **nombre cardinal** *et comment la notion d'***injection** *conduit à définir une* **relation d'ordre** *(Cf. 8ᵉ leçon)* **entre nombres cardinaux.**

● *La notion, importante et intuitivement sentie, de « nombre d'éléments d'un ensemble » nous ayant conduit à identifier l'ensemble des cardinaux finis à celui des entiers naturels, nous nous poserons alors les deux problèmes pratiques suivants :*

si A *et* B *sont des ensembles* **finis**, *de cardinaux respectifs* a *et* b, *quel est le cardinal de l'ensemble* $A \cup B$? *Quel est celui dc* $A \times B$?

1. ENSEMBLES ÉQUIPOTENTS

● DÉFINITION

Un ensemble Y est équipotent à un ensemble X s'il existe une bijection de X sur Y.

On note : X Eq Y ou Eq (X, Y)

● **La relation d'équipotence** est :

Réflexive : $\forall X$, X Eq X

En effet, l'application 1_X est une bijection de X sur X (5ᵉ leçon).

Symétrique : $X \text{ Eq } Y \implies Y \text{ Eq } X$

En effet, si f est une bijection de X sur Y, alors f^{-1} est une bijection de Y sur X (5e leçon, § 6).

Transitive : $X \text{ Eq } Y$ et $Y \text{ Eq } Z \implies X \text{ Eq } Z$

En effet, *si* f est une bijection de X sur Y et g une bijection de Y sur Z, alors $g \circ f$ est une bijection de X sur Z (5e leçon, § 6).

2. CARDINAL D'UN ENSEMBLE

● Si l'ensemble de tous les ensembles existait (ce qui n'est pas), la relation d'équipotence serait une relation d'équivalence ce qui nous permettrait de définir des classes d'équivalence (et de considérer l'ensemble-quotient (4e leçon, § 5).



On tourne la difficulté en définissant un nouvel objet mathématique, appelé **cardinal de l'ensemble X,** et noté *Card* (X), par la condition d'égalité :

$$Card(X) = Card(Y) \iff X \text{ Eq } Y$$

● NOMBRE CARDINAL

Par définition :

Un objet mathématique m *est un* **nombre cardinal,** *s'il existe un ensemble* E *tel que* m = Card (E).

On pose : $\begin{cases} Card(\emptyset) = 0 & \textit{nombre cardinal zéro.} \\ Card(\{a\}) = 1 & \textit{nombre cardinal un.} \end{cases}$

$0 \neq 1$, puisqu'il n'existe pas de bijection de $\emptyset$ sur $\{a\}$.

● Cardinaux finis et entiers naturels.



Tout ensemble E *tel qu'il existe un entier naturel* n *et une bijection du segment* $[1, n]$ *de* $\mathbb{N}$ *sur* E *est dit* **fini.**

On pose alors *Card* (E) = n. L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est donc *l'ensemble des cardinaux finis.*

L'entier naturel n s'appelle aussi *nombre d'éléments* de E.



3. RELATION D'ORDRE ENTRE NOMBRES CARDINAUX

Soit x et y deux nombres cardinaux. Posons : $x = \text{Card}(X)$ et $y = \text{Card}(Y)$.

• DÉFINITION

Le nombre cardinal x *est inférieur ou égal à* y, *s'il existe une* **injection f** *de* X *dans* Y.

On note : $x \leqslant y$

• PROPRIÉTÉS

P₁ *La relation* $x \leqslant y$ équivaut à : X *est équipotent à une partie de* Y.

En effet, si f est une injection de X dans Y, soit $Y' = f(X)$ (avec $Y' \subset Y$), alors *f est une bijection de* X *sur* Y'. Donc X Eq Y'.

Remarquons que la définition ci-dessus ne dépend pas du choix des ensembles X et Y tels que $x = \text{Card}(X)$ et $y = \text{Card}(Y)$, puisque remplacer X et Y par des ensembles équipotents reviendra à **composer des bijections** (5e leçon, § 6). Or la composée de deux bijections est une bijection.

P₂ *La relation* $\leqslant$ *entre cardinaux est une relation d'ordre total.*

Cette relation $\leqslant$ est :

réflexive, puisque 1_X est une injection de X dans X.
transitive, puisque la composée de deux injections est une injection (5e leçon, § 6).

Quant à l'*antisymétrie* et à *l'ordre total*, cela résulte de deux théorèmes que nous admettrons :

Théorème de Zermelo.

Quels que soient les nombres cardinaux x *et* y, *l'une au moins des assertions* $x \leqslant y$ *ou* $y \leqslant x$ *est vraie.*

Théorème de Cantor-Bernstein.

Si x *et* y *sont deux nombres cardinaux :* $x \leqslant y$ *et* $y \leqslant x \implies y = x$

4. CARDINAL DE A ∪ B

• Propriété préliminaire (*lemme*).

Quels que soient les entiers naturels a *et* m, *l'application* f_a *telle que* $x \overset{f_a}{\longmapsto} f_a(x) = a + x$ *est une bijection du segment* $[1, m]$ sur $[a + 1, a + m]$.

L'application f_a de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ étant injective, sa restriction à $[1, m]$ est injective. De plus $1 \leqslant x \leqslant m$ implique $a + 1 \leqslant a + x \leqslant a + m$.

Enfin, pour tout $y \in [a+1, a+m]$ il existe un entier naturel v tel que $a+v=y$; or $y \geqslant a$ implique $v \geqslant 0$ et $y \leqslant a+m$ implique $v \leqslant m$ (sinon, $y > a+m$).
L'application f_a est donc une bijection de $[1, m]$ sur $[a+1, a+m]$.
De ceci, il résulte que le segment $[a+1, a+m]$ a pour cardinal m.



• THÉORÈME 1

Si A et B sont deux ensembles finis, disjoints, de cardinaux a et b respectivement, alors A ∪ B est un ensemble fini et :

$$\textbf{Card}\,(A \cup B) = a + b$$

Si **Card** (A) $= a$ ($a \in \mathbb{N}$) et **Card** (B) $= b$ ($b \in \mathbb{N}$) :
il existe, par définition, une bijection **f** de $[1, a]$ sur A telle que $i \overset{f}{\mapsto} x_i$
et il existe une bijection **g** de $[1, b]$ sur B telle que $j \overset{g}{\mapsto} y_j$ (fig. 1).

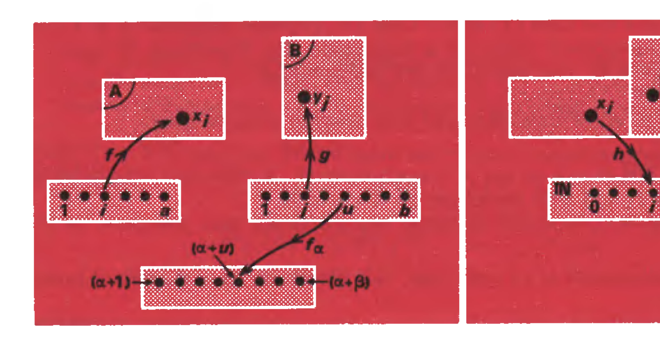


Fig. 1.

Soit f_a la bijection de $[1, b]$ sur $[a+1, a+b]$ telle que : $u \overset{f_a}{\mapsto} a+u$.
L'application **h** de A ∪ B dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\begin{cases} x_i \overset{h}{\mapsto} i & \text{pour } x_i \in A \\ y_j \overset{h}{\mapsto} a+j & \text{pour } y_j \in B \end{cases}$$

est définie, car $A \cap B = \varnothing$.
La restriction de **h** à A est la bijection f^{-1}, et $\mathbf{h}(A) = [1, a]$.
La restriction de **h** à B est la bijection $f_a \circ g^{-1}$ et $\mathbf{h}(B) = [a+1, a+b]$.

Par suite : $\mathbf{h}(A \cup B) = [1, a] \cup [a+1, a+b]$
$= [1, a+b]$.

Donc : **Card** $(A \cup B) = a + b$



• THÉORÈME 2

Si A et B sont deux ensembles finis,

$$\textbf{Card}\ (A \cup B) = \textbf{Card}\ (A) + \textbf{Card}\ (B) - \textbf{Card}\ (A \cap B)$$

ou

$$\textbf{Card}\ (A) + \textbf{Card}\ (B) = \textbf{Card}\ (A \cup B) + \textbf{Card}\ (A \cap B)$$

Désignons par A' et B' respectivement les ensembles $A - (A \cap B)$ et $B - (A \cap B)$ (fig. 2).

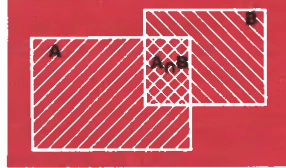


Fig. 2.

Pulsque A' et $A \cap B$ sont disjoints ainsi que B' et $A \cap B$, et que $A = A' \cup (A \cap B)$ et $B = B' \cup (A \cap B)$, d'après le théorème 1 :

$$\text{Card } A = \text{Card } A' + \text{Card } (A \cap B) \qquad (1)$$

$$\text{Card } B = \text{Card } B' + \text{Card } (A \cap B) \qquad (2)$$

D'autre part, $A \cup B = (A' \cup B') \cup (A \cap B)$.

De plus, $A' \cup B'$ et $A \cap B$ sont disjoints. Par suite (théorème 1) :

$$\text{Card } (A \cup B) = \text{Card } (A') + \text{Card } (B') + \text{Card } (A \cap B)$$

Compte tenu de (1) et (2) :

$$\textbf{Card}\ (A \cup B) = \textbf{Card}\ (A) + \textbf{Card}\ (B) - \textbf{Card}\ (A \cap B)$$

CONSEQUENCES

1 Le théorème 2, qui généralise déjà le théorème 1, peut être étendu à la réunion de plus de deux ensembles finis (cf. exercice 9-2). Ainsi :

$$\textbf{Card}\ (A \cup B \cup C) = \textbf{Card}\ (A) + \textbf{Card}\ (B) + \textbf{Card}\ (C) - \textbf{Card}\ (A \cap B) - \textbf{Card}\ (B \cap C) - \textbf{Card}\ (C \cap A) + \textbf{Card}\ (A \cap B \cap C)$$

2 **Pour toute partie A strictement incluse dans un ensemble fini E :**

$$\textbf{Card}\ (A) < \textbf{Card}\ (E)$$

En effet si ${}^cA$ est le complémentaire de A dans E, alors A et ${}^cA$ sont disjoints et $A \cup {}^cA = E$.

Par suite : $\text{Card } (A) + \text{Card } ({}^cA) = \text{Card } (E)$.

Mais $A \neq E$ implique ${}^cA \neq \varnothing$ donc $\text{Card } ({}^cA) \neq 0$.

Donc : $\text{Card } (A) < \text{Card } (E)$

Ainsi, il n'existe pas de bijection d'un ensemble fini E sur une de ses parties strictes A.



5. CARDINAL DE A × B

THÉORÈME

Si A et B sont deux ensembles finis de cardinaux respectifs a et b, alors A × B est un ensemble fini, et : Card (A × B) = a × b

1. La propriété est vraie pour $b = 0$. En effet $B = \varnothing$, implique $A \times B = \varnothing$. Donc *Card* $(A \times B) = 0$ et $0 = $ *Card* $(A \times B) = a \times 0$.

2. Elle est vraie, de même, pour $b = 1$. En effet soit $B = \{\beta\}$.
L'application f de A dans $A \times \{\beta\}$ telle que $x \xrightarrow{f} (x, \beta)$ est une bijection de A sur $A \times \{\beta\}$. Par suite *Card* $(A \times \{\beta\}) =$ *Card* $A = a$.
Or $a = a \times 1 =$ *Card* $A \times$ *Card* B.

3. Supposons la propriété vraie pour $b = n$ (hypothèse de récurrence).
Soit B′ l'ensemble $B \cup \{\beta'\}$ tel que $\beta' \notin B$. Alors $b' =$ *Card* $B' = n + 1$.
Or $A \times B' = A \times (B \cup \{\beta'\}) = (A \times B) \cup (A \times \{\beta'\})$. D'autre part, d'après la définition de l'égalité de deux couples (cf. 3ᵉ leçon) les ensembles $(A \times B)$ et $(A \times \{\beta'\})$ sont disjoints. Donc (théorème 1) :

$$Card\ (A \times B') = Card\ (A \times B) + Card\ (A \times \{\beta'\})$$

soit *Card* $(A \times B') = a \cdot n + a$ (hypothèse de récurrence et 2°)

$$= a \cdot (n + 1)$$
$$= Card\ A \ .\ Card\ B'.$$

La propriété est donc vraie quels que soient les entiers a *et* b.

EXERCICES

9-1 On pose Card (A) = 17, Card (B) = 24, Card (A ∪ B) = 35.
Calculer Card (A ∩ B), Card (A — B), Card (B — A).

9-2 Si A, B, C sont des ensembles finis, démontrer que :

$$Card\ (A \cup B \cup C) = Card\ A + Card\ B + Card\ C - Card\ (A \cap B) - Card\ (B \cap C) - Card\ (C \cap A) + Card\ (A \cap B \cap C).$$

9-3 Soit E un ensemble tel que Card (E) = 950. On désigne par A, B, C, D quatre parties de E dont la réunion est E. On suppose que :

Card (A) = 400 ; Card (B) = 620 ; Card (C) = 220 ;
Card (A ∩ B) = 220 ; Card (B ∩ C) = 130 ; Card (C ∩ A) = 60 ;
Card (A ∩ B ∩ C) = 30.

En déduire Card (D) si Card D ∩ (A ∪ B ∪ C) = 20.

9-4 Une enquête sur la lecture de trois revues *a*, *b*, *c* a fourni les renseignements suivants. Sur 1 000 personnes : 600 lisent *a* ; 500 lisent *b* ; 500 lisent *c*, 200 lisent *b* et *c* ; 300 lisent *c* et *a* ; 300 lisent *a* et *b* ; 100 lisent *a*, *b* et *c*.

Parmi ces 1 000 personnes, combien lisent deux de ces revues, et seulement deux ? Combien ne lisent aucune de ces revues ?

9-5 Un sondage d'opinion a conduit aux résultats suivants : personnes interrogées 3 000, se répartissant en 1 410 ouvriers ou ouvrières ; 936 hommes ; 258 ouvriers. Les personnes interrogées décidées à voter pour « Monsieur X » étaient 1 575 dont 441 ouvriers ou ouvrières ; 126 hommes ; 75 ouvriers.

Désignons par A l'ensemble, de cardinal 1 575, des personnes décidées à voter pour « Monsieur X » ; B celui des « ouvriers ou ouvrières » ; C celui des hommes. Calculer $A \cup B \cup C$. Que penser de ce sondage d'opinion ?

9-6 On désigne par A, B, C, D respectivement, les ensembles des lecteurs de quatre revues *a*, *b*, *c*, *d*. Sachant qu'une annonce d'une page coûte respectivement 25 000 francs dans *a*, 15 000 francs dans *b*, 10 000 francs dans *c* ou *d*, on se propose de choisir les revues de façon : à avoir le maximum de lecteurs ; à ne pas dépasser un budget de 50 000 francs ; à « faire passer » une page d'annonce dans chaque revue retenue. Les cardinaux des ensembles A, B, C, D, $A \cap B$, . . ., $(A \cap B \cap C)$, . . . sont donnés par le tableau ci-dessous :

Card A	700 000	Card $(A \cap B \cap C)$	100 000	Card $(A \cap B)$	250 000
Card B	500 000	Card $(A \cap B \cap D)$	110 000	Card $(A \cap C)$	250 000
Card C	450 000	Card $(A \cap C \cap D)$	20 000	Card $(A \cap D)$	190 000
Card D	350 000	Card $(B \cap C \cap D)$	50 000	Card $(B \cap C)$	250 000
				Card $(B \cap D)$	100 000
				Card $(C \cap D)$	150 000

1° Peut-on faire passer une annonce dans chacune des 4 revues ?

2° Calculer *Card* $(A \cup B \cup C)$, *Card* $(A \cup B \cup D)$, *Card* $(A \cup C \cup D)$, *Card* $(B \cup C \cup D)$.

En déduire les revues dans lesquelles il faut faire passer les annonces.

9-7 Soit E un ensemble fini.

1° Etant donné deux *partitions* P_1 et P_2 de E, on dit que P_1 est *plus fine* que P_2 (noté $P_1 \prec P_2$) si toute *classe* de P_1 est incluse dans P_2. Démontrer que la relation $\prec$ est une relation d'ordre entre les partitions de E. Quelle est la plus fine des partitions ? la moins fine de toutes ?

Application. Soit P_1 et P_2 les deux partitions de $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$ suivantes :

$P_1 =$ | *ace* | *bfg* | *dhij* | *k* | et $P_2 =$ | *acdeijh* | *bfgk* |

Comparer P_1 et P_2.

2° Etant donné deux partitions P et Q, démontrer que l'ensemble des intersections non vides des classes de P et Q est une partition I de E (notée $I = P \wedge Q$). Démontrer que $I = \text{Inf}(P.\ Q)$, pour la relation $\prec$.

Application. Définir [*afh* | *ce* | *dg* | *b*] $\wedge$ [*af* | *ed* | *gb* | *c* | *h*]

3° Deux éléments de E sont *voisins* pour les partitions P et Q s'ils appartiennent à une même classe de P ou de Q ; deux éléments de E sont dits *parents* s'ils sont voisins ou s'ils sont l'un et l'autre parents d'un même troisième (on note $x \sim y$). Démontrer que la relation « être parent » est une relation d'équivalence.

On appelle *union* de P et Q (notée $U = P \vee Q$), la partition de E associés à cette relation d'équivalence. Démontrer que $U = \text{Sup}(P, Q)$ pour la relation $\prec$.

Application. Définir [*afh* | *ce* | *dg* | *b*] $\wedge$ [*af* | *ed* | *gb* | *c* | *h*]

4° Dans un ensemble E de 100 personnes, on distingue les sous-ensembles V, W, T ainsi définis : (V) ensemble des personnes qui possèdent au moins une voiture ; (W) : deux voitures ; (T) : la télévision. On suppose que *Card* V = 60, *Card* W = 25, *Card* T = 40, *Card* $(W \cap T) = 15$, *Card* $(T \cap V) = 32$.

Indiquer la partition la plus fine de E et les cardinaux des classes obtenues.

INDICATIONS

• **Bernstein** (Serghéi) né à Odessa en 1880. Mathématicien russe. A étudié plus particulièrement la théorie des fonctions.

• **Cantor** (Georg) né le 3 mars 1845 à Saint-Pétersbourg, mort le 6 janvier 1918 à Halle. Ses réflexions sur les fondements des mathématiques le conduisirent à créer la *théorie des ensembles*. On doit à Cantor, en particulier, les notions **d'ensembles infinis, de cardinal fini, de nombres transfinis.**

9-3 *Réponse* : *Card* D = 110.

9-4 1° Soit L_2 l'ensemble des lecteurs des deux revues, A l'ensemble des lecteurs de la revue *a*, . . .

Card (L_2) = *Card* $(A \cap B)$ + *Card* $(B \cap C)$ + *Card* $(C \cap A)$ — 3 *Card* $(A \cap B \cap C)$

2° Si L_0 est l'ensemble des personnes ne lisant aucune revue, $L_0 = E - (A \cup B \cup C)$

Calculer *Card* $(A \cup B \cup C)$. . . *Réponse* : *Card* $(L_0) = 100$

9-5 *Card* (B) = 1 410, . . ., *Card* $(B \cap C \cap A) = 75$

On trouvera *Card* $(A \cup B \cap C) > 3\ 000$. Donc, . . .

9-6 2° On trouve que *Card* $(A \cup C \cup D) = 1\ 030\ 000$ est supérieur à tous les autres, compte tenu du budget dont on dispose.

DIAGRAMMES SÉQUENTIELS

10

● *Dans la vie courante, il arrive fréquemment que, pour prendre une décision, on soit conduit à faire une suite de choix.*

Par exemple, le chef du personnel d'une entreprise doit recruter un employé. Il décide pour cela de procéder par étapes.

1re étape : *examen du dossier de candidature.*

A l'issue de cet examen, deux possibilités se présentent :

— la demande est rejetée,

— le postulant est convié à un entretien avec le chef du personnel.

2e étape : *entretien avec le chef du personnel.*

Ce dernier dispose alors de trois possibilités :

— éliminer le candidat,

— l'engager,

— lui faire subir un test d'aptitudes.

3e étape : *test d'aptitudes.*

A l'issue du test, la décision est prise, le candidat est éliminé ou engagé.

Toutes ces décisions successives peuvent se représenter à l'aide d'un schéma (cf. fig. 1) appelé **arbre de choix,** *ou* **diagramme séquentiel.**

● *Dans cette leçon, nous allons définir quelques-uns des diagrammes séquentiels les plus importants, puis étudier leurs propriétés essentielles. La leçon suivante montrera alors combien les problèmes de dénombrement sont simplifiés par l'utilisation de tels diagrammes.*

1. DIAGRAMMES SÉQUENTIELS

DÉFINITIONS

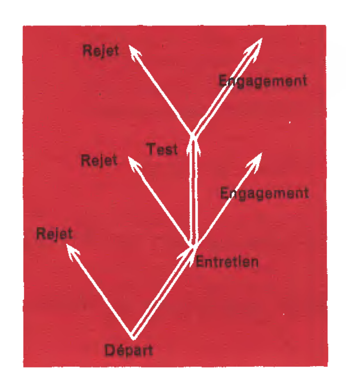


Fig. 1.

— Un **diagramme séquentiel** est formé de points, appelés **sommets** et de *flèches*, appelées **branches** ou ramifications. D'un sommet quelconque peuvent partir plusieurs branches, mais il ne peut y en arriver qu'une seule.

— Un seul point n'est pas l'extrémité d'une flèche : c'est le **départ,** ou encore l'entrée (ou l'origine).

— Toutes les extrémités des branches issues de l'origine portent le nom de **sommets de la première génération.** De même, un point est sommet de la seconde génération, s'il est l'extrémité d'une branche issue d'un sommet de la première génération, etc.

— Tous les points d'une même génération sont placés sur une même ligne.

— Les sommets qui ne sont pas origine d'une branche sont les **sommets terminaux.**

— Sur l'arbre, un **trajet**, ou **chemin,** est formé d'une suite de branches ; l'origine de la première est l'entrée, l'extrémité de la dernière est un point terminal. Il y a évidemment autant de trajets distincts qu'il y a de points terminaux.

Sur l'arbre de la figure 1, il y a 5 points terminaux, donc 5 trajets distincts.

INTÉRÊT DES DIAGRAMMES SÉQUENTIELS

A toute possibilité correspond un trajet sur le diagramme et un seul.

Ainsi, sur la figure 1, qui illustre l'exemple de l'introduction, le trajet figuré en trait double correspond à l'éventualité suivante :

— le candidat s'est vu convié à un entretien avec le chef du personnel, il a subi un test d'aptitudes et a été engagé.

Il existe donc une bijection entre l'ensemble des diverses possibilités et l'ensemble des trajets sur l'arbre, ou encore, l'ensemble des points terminaux. Comme il est très facile de compter les sommets terminaux, on aura de cette façon le nombre total de toutes les possibilités ; on est sûr de ne pas en oublier, ni d'en compter une plusieurs fois.

Dans l'exemple précédent, il y a 5 possibilités différentes puisqu'il y a 5 points terminaux sur l'arbre.

2. ARBRES DES EXPONENTIELLES

• EXEMPLE

Considérons les deux ensembles (finis) : $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{0, 1\}$.

Cherchons toutes les **applications** de l'ensemble A vers l'ensemble B.

Définir une application de A vers B, c'est faire une suite de choix, à savoir : déterminer successivement pour chaque élément de A, quelle sera son image dans B.

Le diagramme séquentiel correspondant est construit sur la figure 2. Les éléments des première, seconde et troisième générations correspondent aux choix faits pour les images de *a*, *b*, *c*. On emprunte la flèche de gauche ou celle de droite, suivant que l'image choisie est 0 ou 1.

Sur cet arbre, le trajet figuré en trait double correspond à l'application de A dans B dont le graphe est :

$$\{(a, 0), (b, 1), (c, 0)\}$$

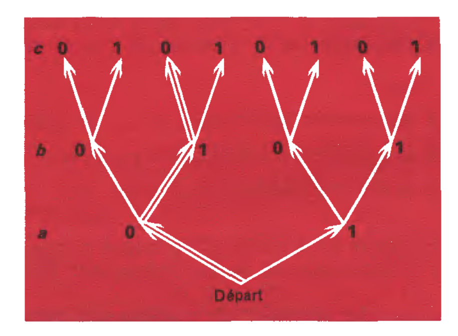


Fig. 2.

Nous constatons immédiatement sur cet arbre que :

— de chaque point, autre que les points terminaux, part le **même nombre** de ramifications : 2 ;

— tous les points terminaux sont de la même génération ;

— à chaque génération, le nombre de sommets s'obtient en doublant celui de la génération immédiatement inférieure (progression géométrique de raison 2) ;

— puisqu'il y a $2^3 = 8$ points terminaux, le nombre des applications de l'ensemble A vers l'ensemble B est 8.

D'où la définition suivante :

• DÉFINITION

On appelle **arbre des exponentielles,** ou **arbre des applications,** tout *diagramme séquentiel dans lequel* :

1° *de chaque point, autre que les points terminaux, part le même nombre de ramifications,*

2° *tous les points terminaux sont de la même génération.*

Un tel arbre peut être associé aux applications d'un ensemble fini A dans un ensemble fini B.



• Théorème.

Si $\mathcal{F}$ est l'ensemble des applications d'un ensemble fini A vers un ensemble fini B, alors :

$$\textbf{Card (A)} = m \quad \text{et} \quad \textbf{Card (B)} = n \quad \Longrightarrow \quad \textbf{Card } (\mathcal{F}) = n^m$$

En effet, si *Card* (A) $= m$ et *Card* (B) $= n$, l'arbre des applications de A vers B est tel que :

— de tout point, autre que les points terminaux, partent *n* ramifications puisque, pour tout élément de A, on a le choix entre *n* possibilités pour son image ;

— les points terminaux sont ceux de la *m-ième* génération, puisque le nombre d'éléments de A étant *m*, il y a *m* choix successifs à effectuer.

Donc :

à la première génération, il y a n sommets ;

à la deuxième génération, il y a : $n \times n = n^2$ sommets ;

à la *m-ième* génération, il y a : $\underbrace{n \times n \times \ldots \times n}_{m} = n^m$ sommets.

Puisque tout sommet terminal correspond à une application de A vers B, et réciproquement, le théorème est démontré.

La démonstration ci-dessus peut être, avantageusement, remplacée par un raisonnement par récurrence (Cf. 1re leçon).

3. ARBRE DES FACTORIELLES

Nous avons indiqué (§ 2) la construction de l'arbre des applications d'un ensemble fini A vers un ensemble fini B. Nous nous proposons maintenant de construire **l'arbre des injections** de A dans B si Card (A) $\leqslant$ Card (B) et, éventuellement, l'arbre des bijections de A sur B si les deux ensembles ont le même nombre d'éléments.

EXEMPLE

Posons : $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad A' = \{1, 2, 3\}$ $\quad$ et $\quad B = \{a, b, c, d\}$.

Si nous voulons définir une **injection** de A dans B, il faudra indiquer l'image de chaque élément de B, donc faire une suite de choix. Pour l'image de 1, il y aura 4 possibilités (soit *a*, soit *b*, soit *c*, soit *d*) mais, une fois cette image choisie, il ne reste plus que 3 possibilités pour l'image de 2, le même élément de B ne pouvant être à la fois image de 1 et de 2. De même, pour l'image de 3, il ne reste que 2 possibilités, et pour celle de 4, une seule.

Ceci nous conduit au diagramme de la figure 3, appelé **arbre des bijections** de A sur B. Si nous enlevons les sommets de la dernière génération et les branches qui s'y terminent, nous obtenons alors l'arbre des injections de A' dans B.

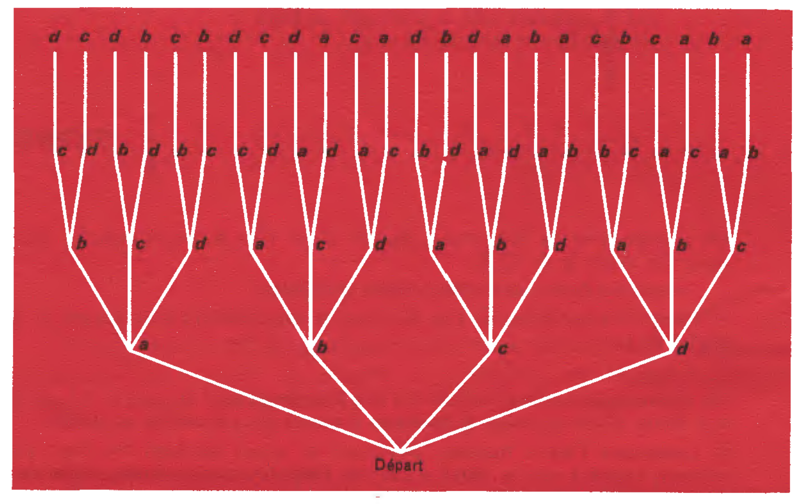


Fig. 3.

● DÉFINITION

On appelle **arbre des factorielles,** *tout diagramme séquentiel possédant les propriétés suivantes* :

1° *de tous les points d'une même génération part le même nombre de ramifications;*

2° *si d'un point partent* k *ramifications, d'un sommet de la génération suivante partent* (k — 1) *ramifications.*



Un tel arbre peut être considéré comme l'arbre *des bijections d'un ensemble fini sur lui-même*, ou sur un *ensemble ayant le même nombre d'éléments.*



● NOTATION n!

Considérons un arbre des factorielles tel que n branches partent de l'origine.
Alors, le nombre des sommets d'une génération se calcule facilement :

— sur la première génération il y a n sommets,
— sur la seconde il y en a $n(n-1)$
— sur la troisième $n(n-1)(n-2)$
. . . .
— sur la p-ième $n(n-1)\dots(n-p+1)$

En particulier, sur la dernière génération, il y a :

$$n(n-1)(n-2)\dots 2.1 \text{ sommets.}$$

Par définition, on pose :

$$n\,! = 1.2\ \dots\ (n-1).n$$

$n\,!$ = produit des n premiers entiers
($n\,!$ se lit : « factorielle n »).



EXERCICES

10-1 Un représentant de commerce, partant d'une ville A, doit traverser successivement les villes B, C, D, E.

1° Construire l'arbre des divers trajets possibles.

2° Construire cet arbre si l'on sait que le représentant doit passer en C avant d'aller en D.

10-2 Un commerçant vend un article. En une journée, il peut en vendre 0, 1, ou 2 unités. Au début d'une journée, il possède 4 unités de cet article en stock.

1° Construire l'arbre traçant l'évolution du stock pendant les trois jours qui suivent, sachant que le stock n'est pas réapprovisionné durant cette période.

2° Combien y a-t-il de possibilités différentes telles que le stock est épuisé au bout des trois jours ?

10-3 On jette une pièce de monnaie en l'air 5 fois de suite et on note, chaque fois, le côté visible : pile ou face. Construire l'arbre des diverses possibilités. Dans combien de cas « face » est-il apparu au moins 2 fois consécutivement ? au moins 3 fois consécutivement ?

10-4 On donne les huit noms d'animaux suivants : chien, chat, cheval, mouton, pigeon, chacal, lapin et tortue. Trouver en 3 questions, auxquelles il sera répondu par *oui* ou par *non*, le nom d'un animal choisi par un camarade.

10-5 On possède 13 pièces de monnaie de même valeur, l'une d'entre elles, fausse, pesant moins lourd que les autres. Montrer que, en 3 pesées au plus, il est possible de déterminer la pièce fausse. Construire le diagramme séquentiel correspondant.

10-6 Un livre a 256 pages en 12 chapitres. Démontrer qu'en 8 questions, auxquelles il sera répondu par *oui* ou par *non*, il est possible de déterminer le numéro de la première page du chapitre 5.

10-7 Dans un atelier, une pièce doit passer sur 5 machines A, B, C, D, E.

1° Combien y a-t-il de trajets possibles, si l'ordre des passages sur les diverses machines est indifférent ?

2° Combien y a-t-il de trajets si la pièce doit passer en A avant B et D, en C avant E ? Construire le diagramme séquentiel correspondant.

ANALYSE COMBINATOIRE



● *Le rôle important de la Statistique et des Probabilités dans le développement scientifique actuel confère de l'intérêt aux* **problèmes de dénombrement** *dont s'occupe l'Analyse Combinatoire.*

● *De tels problèmes de dénombrement nous sollicitent d'ailleurs fréquemment dans la vie courante, par exemple :*

— de combien de façons peut-on former un Bureau, composé d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier, à choisir parmi douze personnes supposés également compétentes?

— dans une course de quinze chevaux, combien existe-t-il « d'arrivées » possibles?

— de combien de façons peut-on former une « main » de treize cartes dans un jeu de cinquante-deux?

● *Dans cette leçon, nous montrons que le langage ensembliste est particulièrement adapté pour traduire ces problèmes qui se rattachent : le premier, à la notion d'***injection d'un ensemble fini dans un autre ;** *le deuxième, cas particulier du précédent, à la notion de* **bijection d'un ensemble fini sur lui-même ;** *le dernier, à l'étude de l'ensemble* **des parties d'un ensemble fini.**

● *Cette étude nous sera l'occasion de montrer que les diagrammes séquentiels présentés dans la leçon précédente permettent de dénombrer toutes les possibilités sans en oublier aucune, ni en compter une plusieurs fois.*

1. PERMUTATIONS

EXEMPLE

❶ **Dans une course entre 15 chevaux, combien existe-t-il d'arrivées possibles des 15 chevaux?**

Soit I_{15} l'ensemble des 15 places, et $E = \{a, b, c, \dots, n, o\}$ l'ensemble des 15 chevaux. Il s'agit d'attribuer un numéro (et un seul) aux 15 éléments de E. Une « arrivée » est donc le résultat d'une *bijection* de I_{15} dans E. Il y a donc $15 \times 14 \times \dots \times 2 \times 1$ possibilités.

❷ Nous représentons (fig. 1) une bijection de I_3 dans l'ensemble $E = \{a, b, c\}$ de trois éléments et indiquons (fig. 2) les $3 \times 2 \times 1 = 6$ bijections possibles.

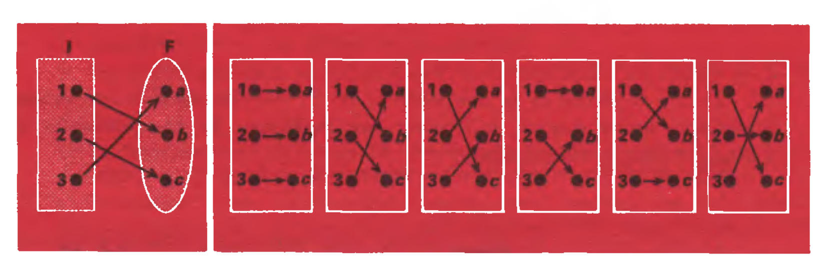


Fig. 1. Fig. 2.

Soit A un ensemble fini, de cardinal n. Par définition même du cardinal d'un ensemble fini, il existe une bijection entre A et le segment initial $[1, n]$ de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels (9e leçon, § 3).



• DÉFINITION

On appelle **permutation de l'ensemble A,** toute *bijection du segment* $[1, n]$ *sur* A.

Une permutation de A est donc une numérotation de 1 à n des n éléments de A, numérotation que l'on peut mettre en évidence en écrivant simplement les éléments de A dans l'ordre de cette numérotation.

Si par exemple $A = \{a, b, c, d\}$ et si $\{(1, b), (2, d), (3, a), (4, c)\}$ est le graphe d'une permutation de A, alors, en mettant les éléments de A dans l'ordre voulu, la permutation pourra se noter (b, d, a, c) ou $b\ d\ a\ c$.

• PROPRIÉTÉ

Sur le diagramme séquentiel des permutations de A (cf 10e leçon, § 3) il y a $n!$ points terminaux ; donc, **le nombre P_n des permutations de A est :**

$$P_n = n!$$

2. ARRANGEMENTS

EXEMPLE

Dans une course entre 15 chevaux, combien existe-t-il d'arrivées possibles des 3 premiers chevaux dans l'ordre?

Soit $I_3 = \{1, 2, 3\}$ l'ensemble des 3 places, $E = \{a, b, c, \ldots, m, n, o\}$ l'ensemble des 15 chevaux.

Il s'agit d'attribuer un numéro (et un seul) à 3 éléments de E. Le problème revient donc à déterminer le nombre des injections de I_3 dans E.

Or il existe 15 façons possibles d'attribuer le numéro 1. Une telle possibilité ayant été choisie (fig. 3), il reste 14 possibilités d'attribuer le numéro 2; soit 15×14 possibilités d'attribuer les numéros 1 et 2. Les numéros 1 et 2 ayant été attribués (fig. 4), il reste 13 possibilités d'attribution pour le numéro 3.

Il existe donc $15 \times 14 \times 13 = 2\ 730$ « arrivées » possibles!

Et il existe 2 730 injections de I_3 ensemble de 3 éléments, dans E, ensemble de 15 éléments.

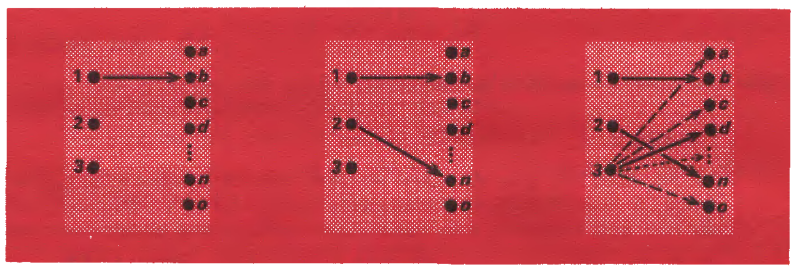


Fig. 3. Fig. 4. Fig. 5.

La figure 5 indique, en traits pleins, une injection φ parmi les 2 730 possibles : celle pour laquelle $\varphi(1) = b$, $\varphi(2) = n$, $\varphi(3) = d$.
Pour d'autres injections, $\varphi(3)$ est indiqué en pointillé.

DÉFINITION

Si A *est un ensemble fini, de* n *éléments, et* p *un entier au plus égal à* n, *on appelle* **arrangement de p éléments de A,** *toute injection du segment* $[1, p]$ *dans* A.



Un arrangement de p éléments de A est donc une numérotation de 1 à p de p éléments distincts de A.

Si $A = \{a, b, c, d, e\}$ alors, des arrangements distincts de trois éléments de A sont par exemple : (a, d, e), (d, e, a), (c, e, d), etc...

PROPRIÉTÉ

Si l'on construit l'arbre des permutations (cf. 10e leçon, § 3) de A, en s'arrêtant à la p-ième génération, on obtient l'arbre des arrangements de p éléments de A.



En désignant par A_n^p le nombre d'arrangements distincts de p éléments pris dans un ensemble qui en renferme n, alors :

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-p+1)$$

Par exemple : $A_6^3 = 6.5.4 = 120.$

On exprime également A_n^p sous la forme, plus condensée :

$$A_n^p = n(n-1)\ldots(n-p+1) = \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{(n-p)\ldots 2.1}$$

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

● **REMARQUE**

Si $n = p$, nous savons que $A_n^p = P_n = n!$.
Or, en appliquant la formule ci-dessus, on a :

$$A_n^n = \frac{n!}{0!} \quad \text{et} \quad A_n^n = n!$$

Pour cette raison, on convient de poser : $0! = 1$.

EXEMPLE

Un mot étant une suite de lettres, combien, avec les 5 *lettres* a, b, c, d, e *peut-on former de mots distincts de* 3 *lettres dans lesquels les trois lettres sont distinctes.*

Un mot dans lequel les trois lettres sont distinctes est évidemment obtenu par un arrangement de 3 lettres choisies parmi 5. Leur nombre en est :

$$A_5^3 = 5.4.3 = 60.$$



3. COMBINAISONS

EXEMPLE

Combien de délégations différentes peut-on former en choisissant 3 personnes parmi 15?
Ou : dans une course entre 15 chevaux, combien de paris faut-il engager pour être sûr de jouer les 3 chevaux gagnants, sans ordre?

— Le nombre d'arrangements de 15 personnes 3 à 3 est A_{15}^3. Or, toute bijection d'un arrangement sur lui-même donne... la même délégation, ou **partie** de 3 éléments, parmi les 15.

Pour chaque arrangement, il existe 3! permutations (§ 1).

— Inversement, toute partie constituée de 3 éléments conduit à $P_3 = 3!$ arrangements.

— Le nombre de délégations de 3 personnes est donc :

$$\frac{A_{15}^3}{P_3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455.$$

• DÉFINITION

Si A *est un ensemble fini de* n *éléments et* p *un entier au plus égal* à n, on appelle **combinaison de p éléments de A, tout sous-ensemble de A renfermant p éléments.**

X est une combinaison de p éléments de A $\iff$ (X ⊂ A et Card (X) = p)

Si A = {a, b, c, d, e}, nous avons vu que (a, d, e) et (d, e, a) sont deux arrangements distincts de trois éléments de A. Il leur correspond la même combinaison : {a, d, e}. L'ordre intervient dans les arrangements, il n'intervient pas dans les combinaisons.

On posera, par définition :

C_n^p = **nombre de combinaisons de p éléments pris parmi n.**

• CALCUL DE C_n^p

Pour obtenir un arrangement de p éléments pris dans un ensemble qui en renferme n, on peut procéder de la façon suivante :

— *construire d'abord une combinaison de* p *éléments,*

— *numéroter de* 1 *à* p, *les* p *éléments choisis, donc effectuer une permutation de cette combinaison.*

Le nombre d'arrangements de p éléments parmi n est donc le produit du nombre de combinaisons de p éléments par le nombre de permutations sur ces p éléments. Il en résulte que :

$$C_n^p \cdot P_p = A_n^p$$

d'où :

$$p\,!\,.\,C_n^p = \frac{n\,!}{(n-p)\,!}$$

et :

$$C_n^p = \frac{n\,!}{p\,!(n-p)\,!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1\ 2\ldots p}$$

Par exemple :

$$C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56.$$

• PROPRIÉTÉS DES NOMBRES C_n^p

1 $C_n^{n-p} = C_n^p$

Cette propriété se vérifie immédiatement sur la formule. On peut également remarquer qu'il y a autant de sous-ensembles de p éléments pris parmi n, qu'il y

en a renfermant $(n - p)$ éléments : il suffit de faire correspondre à tout sous-ensemble de p éléments, le sous-ensemble complémentaire qui en renferme $(n - p)$.

2 $C_n^0 = C_n^n = 1$

En effet, C_n^0 est le nombre de sous-ensemble vide d'un ensemble de n éléments : il n'y en a qu'un seul. Par ailleurs, la formule donne, en appliquant la convention $0! = 1$, convention qui se trouve à nouveau justifiée :

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!\,.\,n!} = 1$$

3 $C_n^1 = n$

Il y a, en effet, évidemment autant de sous-ensembles d'un seul élément qu'il y a d'éléments dans l'ensemble donné.

4 $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

En effet
$$C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} = \frac{(n-1)!}{p!\,(n-1-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!}$$
$$= (n-1)!\left[\frac{n-p+p}{p!\,(n-p)!}\right]$$
$$= \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = C_n^p$$

TRIANGLE DE PASCAL

De la relation de récurrence ci-dessus, nous allons déduire la construction d'un tableau, appelé **triangle de Pascal,** dont les termes seront les valeurs des nombres C_n^p.



Fig. 6.

Ce tableau est représenté sur la figure 6.

Les 1 qui bordent le triangle, à droite et à gauche, sont les valeurs de C_n^0 et C_n^n. Sur la première ligne, le seul terme est donc la valeur de C_0^0.

Les valeurs des nombres C_n^p se trouvent donc, lorsque p varie, sur la $(n+1)$*ème* ligne. La valeur de n qui correspond à une ligne est du reste facile à trouver : c'est le deuxième terme de cette ligne.

D'après la formule de récurrence, tout terme du tableau, autre que les termes extrêmes, est la somme de deux autres : le terme au-dessus et le terme à gauche de ce dernier.

Sur la figure 6, sont cerclés les trois termes correspondant à la relation :

$$C_6^3 = C_5^3 + C_5^2.$$

4. SIMPLEXES

Nous avons défini (cf. 8e leçon, § 3) les **simplexes.**

Les questions traitées ci-dessus se rattachent à des *problèmes de dénombrement dans le simplexe associé à un ensemble* E_n *de* **n** *éléments.*

La figure 7 représente le simplexe associé à un ensemble E de 4 éléments, ici, (a, b, c, d).

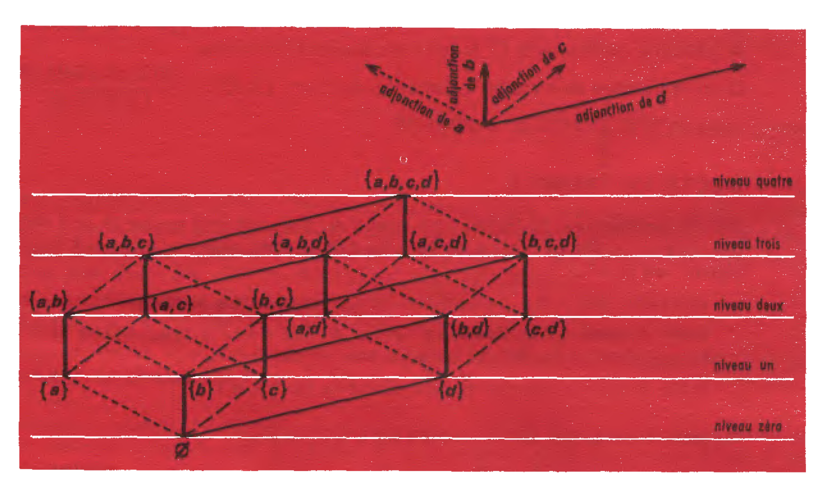


Fig. 7.

Ainsi, dans l'ordre d'exposition des problèmes :

- *les permutations* correspondent aux **chemins** joignant l'ensemble Ø à l'ensemble E.

Sur la figure 7, il y a 24 chemins allant de Ø à E ; $P_4 = 24$.

- *les arrangements de* **n** *éléments* **p** *à* **p** correspondent aux **chemins** qui, à partir de l'ensemble Ø aboutissent à une partie située au niveau **p.**

Ainsi sur la figure 7, il y a 6 chemins aboutissant à $\{a, b, c\}$; chacun correspond à un arrangement : les 3 éléments a, b, c étant rencontrés, dans le trajet, dans l'ordre occupé dans l'arrangement. Puisque au niveau 3 se trouvent 4 parties, $A_4^3 = 6 \times 4 = 24$.

- *les combinaisons de* n *éléments* p *à* p sont les sous-ensembles situés au niveau p.

Ainsi, figure 7, C_4^3 est le nombre de parties situées au niveau 3, soit $C_4^3 = 4$. En raisonnant par récurrence sur *n*, nombre d'éléments de l'ensemble E, la construction du simplexe $\mathfrak{P}(E)$ permet de retrouver les résultats de ce chapitre.

5. EXEMPLES DE PROBLÈMES DE DÉNOMBREMENT

PREMIER EXEMPLE

Avec un jeu de 32 cartes, combien de « mains » de 8 cartes, contenant deux rois, peut-on former ?

Pour obtenir toutes les combinaisons demandées, il suffit : de former une « main » de 6 cartes prises parmi les 28 restantes lorsqu'on a retiré les 4 rois, d'adjoindre ensuite, à chaque « main », deux rois pris parmi les 4.

Or le nombre de combinaisons de la première sorte est C_{28}^{6}.

A chacune correspond C_4^2 façons d'adjoindre deux rois.

D'où le nombre de « mains » demandé est : $n = C_{28}^{6}.C_4^2 = \frac{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \times \frac{4.3}{1.2}$

soit $n = 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 23 \cdot 5 = 2\,260\,440$.

DEUXIÈME EXEMPLE

Sur 20 personnes, 10 lisent une revue A, 8 lisent une revue B et 3 lisent les deux revues. De combien de facons différentes peut-on choisir 5 personnes parmi les 20 si :

1 chacune des cinq personnes lit au moins une revue ;

2 trois d'entre elles lisent la revue A, les deux autres lisent la revue B, chacune d'elles ne lisant qu'une seule revue ;

3 trois d'entre elles au moins lisent la revue A?

On peut répartir les 20 personnes en 4 groupes :

— celles qui lisent A et B .... 3 personnes,
— celles qui ne lisent que A .... 10 — 3 = 7 personnes,
— celles qui ne lisent que B .... 8 — 3 = 5 personnes,
— celles qui ne lisent ni A, ni B .... 20 — 15 = 5 personnes.

Soit U l'ensemble des 20 personnes, soit *a* et *b* respectivement les ensembles des personnes qui lisent A et celles qui lisent B, alors les quatre groupes précédents sont respectivement :

$$a \cap b \qquad a - b \qquad b - a \qquad U - (a \cup b)$$

1 Si la première condition est remplie, les 5 personnes sont choisies dans $a \cup b$. Le nombre des combinaisons est :

$$C_{15}^{5} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 3\,003.$$

2 Si la seconde condition est remplie, 3 personnes sont choisies dans $(a - b)$ et les deux autres dans $(b - a)$. Pour chaque combinaison de 3 personnes ne lisant que A, il y a C_5^2 combinaisons de 2 personnes ne lisant que B. Le nombre total est donc :

$$C_7^3 \,.\, C_5^2 = 35 \times 10 = 350.$$

3 La troisième condition est remplie dans les trois cas suivants :

— 3 personnes, exactement, lisent A,
— 4 personnes, exactement, lisent A,
— les 5 personnes lisent A.

Seuls nous intéressent ici les ensembles a et $(U - a)$. Comme pour la question précédente, nous obtenons :

$$\begin{cases} C_{10}^{3} \cdot C_{10}^{2} = 120 \times 45 = 5\,400 & \text{pour le premier cas,} \\ C_{10}^{4} \cdot C_{10}^{1} = 210 \times 10 = 2\,100 & \text{pour le second cas,} \\ C_{10}^{5} = 252 & \text{pour le dernier cas.} \end{cases}$$

En tout, il y a donc $5\,400 + 2\,100 + 252 = 7\,752$ façons différentes de choisir les 5 personnes en respectant la dernière condition.



EXERCICES

11-1 On considère les nombres de 4 chiffres du système décimal, le premier chiffre (de gauche) étant différent de 0. Combien existe-t-il de tels nombres dans lesquels les 4 chiffres sont distincts ? Combien y a-t-il alors de nombres de 4 chiffres dans lesquels deux des chiffres, au moins, sont identiques ?

11-2 Démontrer la formule $A_n^p = A_{n-1}^p + p \cdot A_{n-1}^{p-1}$

Construire un triangle analogue au triangle de Pascal, dans lequel les termes seront les diverses valeurs de A_n^p pour $n \leqslant 8$.

11-3 Dans un comité de 10 personnes réparties en deux groupes de 5, on procède à l'élection d'un bureau constitué d'un président, d'un vice-président et d'un secrétaire.

1° Combien de bureaux différents peut-on constituer avec les 10 personnes ?

2° Combien de bureaux différents peut-on constituer si le président et le vice-président doivent appartenir à deux groupes différents ?

11-4 1° Dans un lot de 20 pièces fabriquées, on en prélève 4. De combien de façons différentes peut-on faire ce prélèvement ?

2° On suppose alors que, sur les 20 pièces, 4 sont mauvaises. De combien de façons différentes peut-on faire alors le prélèvement si :

a) les 4 pièces choisies sont bonnes ?
b) une au moins d'entre elles est mauvaise ?
c) une et une seule est mauvaise ?
d) deux au moins sont mauvaises ?

11-5 Dans une pochette il y a 10 timbres : 3 rouges, 5 bleus et 2 verts. On en choisit 4. De combien de façons différentes peut-on faire ce choix sachant que :

1° les timbres choisis sont de la même couleur ?

2° une et une seule des couleurs ne figure pas dans les timbres choisis ?

3° les trois couleurs figurent parmi les timbres choisis ?

11-6 On choisit 5 cartes dans un jeu de 32. De combien de façons différentes peut-on faire ce choix, si parmi les 5 cartes, il y a :

1° exactement 3 rois ?

2° au moins 3 rois ?

3° 2 cœurs et 3 piques ?

4° 2 cartes d'une couleur et 3 d'une autre ?

11-7 Simplifier les expressions : $\dfrac{n!}{(n-2)!}$ $\qquad \dfrac{n!}{(n+1)!} - \dfrac{(n-1)!}{n!}$

11-8 Déterminer n pour que l'une des conditions suivantes soit remplie :

(1) $C_n^2 = 190$ | (2) $C_n^3 = 220$

(3) $C_n^4 = C_n^8$ | (4) $A_n^3 = 90\,n$.

11-9 Calculer la valeur du rapport :

$$\frac{C_n^1 \cdot C_{2n}^2}{C_{3n}^3}$$

11-10 Calculer le rapport $\dfrac{C_n^{p+1}}{C_n^p}$. Pour quelles valeurs de p, ce rapport est-il inférieur à 1 ? Comparer les nombres C_n^p lorsque p varie, n étant fixe. Quelle est, dans ces conditions, la valeur maximum de C_n^p ? Pour quelle valeur de p est-elle atteinte ? (on envisagera deux cas selon la parité de n).

11-11 Démontrer les formules suivantes :

1° $C_{n+2}^{k+1} = C_n^{k+1} + 2C_n^k + C_n^{k-1}$

2° $C_n^k \cdot C_{n-k}^{p-k} = C_n^p \cdot C_p^k$ si $k \leqslant p \leqslant n$.

11-12 Rechercher sur le triangle de Pascal, un moyen simple de calculer la somme des termes d'une colonne. Trouver et démontrer la formule correspondante. Appliquer cette formule à la somme des n premiers nombres entiers.

11-13 **Binôme de Newton.**

Soit a et b deux nombres réels.

1° Calculer $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$.

Vérifier que $(a+b)^3 = C_3^0 \,.\, a^3 + C_3^1 \,.\, a^2 b + C_3^2\, a\, b^2 + C_3^3\, b^3$.

2° Démontrer, par récurrence, que (si $n \in \mathbb{N}$) :

$(a+b)^n = C_n^0\, a^n + C_n^1\, a^{n-1}\, b + \ldots + C_n^p\, a^{n-p}\, b^p + \ldots + C_n^n\, b^n$.

(cette formule s'appelle formule du *binôme de Newton*).

3° En déduire le développement de $(1+x)^{11}$.

11-14 Calculer, à l'aide de la formule du binôme, les expressions :

$$(x-y)^6, \quad (1+2x)^5, \quad (2-x)^7.$$

11-15 Vérifier, à l'aide de la formule du binôme :

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$$
$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 0$$

Que peut-on déduire de la première formule ?



INDICATIONS

• **Newton** (Isaac) né le 25 décembre 1642 à Woolsthorpe, mort à Kensington le 20 mars 1727.

L'un des plus grands génies scientifiques de tous les temps.

En mathématiques, fut l'inventeur (avec Leibniz, mais de façon indépendante) du *calcul infinitésimal* (différentiel et intégral). En physique, sa contribution essentielle fut sa *théorie de la gravitation universelle.*

Citons deux « découvertes » accessoires : en mathématiques, le développement du binôme; en physique, le fait que la lumière blanche est le résultat de la combinaison de toutes les couleurs.

Newton fut conduit à la découverte des méthodes infinitésimales par l'étude de problèmes du genre suivant : « vitesse » d'un mobile et, inversement, distance parcourue par un mobile dont la vitesse varie. Il découvrit alors le « *théorème fondamental du calcul différentiel et intégral* » et introduisit la notion d'*équations différentielles.*

• **Pascal** (Blaise) né le 19 juin 1623 à Clermont-Ferrand, mort le 19 août 1662 à Paris. Philosophe, écrivain, physicien et mathématicien. En mathématiques, son œuvre la plus originale (établie avec Fermat) fut sa *théorie des probabilités* (le « triangle arithmétique » était l'aboutissement de recherches sur les dénombrements); son œuvre géométrique (*géométrie perspective* ou projective) semble lui avoir été inspirée par Désargues.

11-2 Utiliser la formule $A_n^p = \dots$

11-6 1° Oter les 4 rois, ..., choisir 2 cartes parmi les 28 restantes ...

11-8 Utiliser les expressions de C_n^p ou A_n^p.

11-11 1° *Méthode par le calcul.* Utiliser l'expression de C_n^p.

Méthode directe. Parmi les combinaisons de $(n + 2)$ éléments, distinguer 2 éléments, disons a et b, des n autres et compter les images contenant a et b, a *ou* b, ni a, ni b ...

11-13 2° Poser $(a + b)^k = \dots$

Remarquer que $(a + b)^{k+1} = (a + b)^k (a + b)$.

Utiliser la propriété (4°) des nombres C_n^p.

11-15 Développer $(1 + x)^n$ et remplacer x successivement par ...

LE CORPS DES NOMBRES COMPLEXES



● *Cette leçon est un bel exemple de construction d'une théorie entièrement* **axiomatisée.** *C'est ce qui la justifie amplement en classe de Terminale A comme illustration du cours de logique. Bien entendu, du point de vue scientifique, il ne s'agit pas seulement d'un jeu de l'esprit, d'une construction « gratuite » : les applications de cette théorie sont nombreuses. Nous ne les aborderons pas ici.*

● *Rappelons brièvement quelques résultats connus.*

— *Si* m *et* n *sont deux entiers naturels donnés nous savons que l'équation* $m + x = n$ *a des solutions, si et seulement si,* $n \geqslant m$.

Par exemple, l'équation $3 + x = 1$ *n'a pas de solution, tandis que* $3 + x = 5$ *a pour solution (unique)* 2.

Au contraire, quels que soient les entiers relatifs α *et* β, *l'équation* $\alpha + x = \beta$ *a toujours une solution (unique). Par exemple, l'équation* $3 + x = 1$ *a pour solution unique* -2.

— *Mais dans l'ensemble des entiers relatifs, non nul, l'équation, en* x :

$$\alpha \,.\, x = \beta \quad \textit{n'a pas toujours de solution.}$$

Par exemple l'équation $(-2)\,.\,x = 5$ *n'a pas de solution, tandis que* $(-2)\,.\,x = 8$ *a pour solution (unique)* -4.

Au contraire, dans l'ensemble des nombres rationnels, non nul, toute équation, en x, de la forme $u \,.\, x = v$ *a une solution (unique). Ainsi* $(-2) \,.\, x = 5$ *a pour solution* $-\dfrac{5}{2}$.

— *De même, si* ρ *est un nombre réel donné, l'équation* $x^2 = \rho$ *a : deux solutions si* ρ *est strictement positif (ces solutions sont* $\sqrt{\rho}$ *et* $-\sqrt{\rho}$*) ; une solution* $(x = 0)$ *si* $\rho = 0$; *pas de solution si* ρ *est strictement négatif. Ainsi, dans l'ensemble des nombres réels les équations* $x^2 = -4$ *et* $x^2 = -1$ *n'ont pas de solution tandis que* $x^2 = 1$ *a pour solutions les nombres* 1 *et* -1.

● *Nous pouvons alors nous poser la question suivante : est-il possible « d'imaginer » un* **nouvel** *ensemble dans lequel, quel que soit l'élément ζ donné, l'équation* $x^2 \overset{?}{=} \zeta$ *a toujours (au moins) une solution ?*

● *Comme toujours en mathématiques, ce nouvel ensemble* **ne sera pas construit** *à partir de rien : nous supposerons qu'il satisfait diverses conditions (axiomes posés a priori).*

● *Alors le plan logique d'étude d'un tel problème est le suivant :*

— **admettre** *que le problème posé a une solution ;*

— *en* **déduire** *les* **conditions nécessaires** *auxquelles doit satisfaire cette solution ;*

— **construire** *effectivement un* **modèle** *satisfaisant à ces conditions ;*

— **vérifier** *que le modèle construit est bien solution du problème posé.*

1. AXIOMES DE LA THÉORIE

Pour résoudre le problème ci-dessus, nous devons poser a priori certains axiomes. Il est clair que « l'idéal » serait (afin de « conserver » les propriétés déjà démontrées) que le nouvel ensemble « contienne » l'ensemble des nombres réels. D'autre part, l'ensemble des réels étant un corps commutatif (Cf. 7ᵉ leçon), nous souhaiterions ne pas perdre les avantages de cette structure. Enfin, tout élément de l'ensemble devant être un carré, il existe un (au moins) élément de l'ensemble dont le carré est égal à — 1.

● Axiomes.

Nous supposons :

A_1 qu'il existe un ensemble E muni de deux opérations internes, appelées addition et multiplication, notées $+$ et $\cdot$, tel que $(E, +, \cdot)$ *soit un corps commutatif* ;

A_2 que l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels est un sous-corps de E (c'est-à-dire un corps inclus dans E) ;

A_3 qu'il existe un élément de E, noté **i**, tel que $(i)^2 + 1 = 0$ (ou $(i)^2 = -1$).

2. RECHERCHE DES CONDITIONS NÉCESSAIRES

C_1 Quels que soient les réels a et b, a + ib est élément de *E*.

En effet, si b est un réel quelconque : d'après A_2, $b \in E$.
Or $b \in E$ et $i \in E$ impliquent, d'après A_1, $i\,b \in E$.
Enfin $a \in E$ et $i\,b \in E$ impliquent, d'après A_1, $a + i\,b \in E$

C_2 Dans E, $\quad \mathbf{a + ib = 0} \iff \begin{cases} \mathbf{a = 0} \\ \mathbf{b = 0} \end{cases}$

En effet l'égalité $a + ib = 0$ équivaut, dans le corps E, à : $-a = ib$.
Supposons $b \neq 0$.
Alors, dans $\mathbb{R}$, il existe un inverse, b^{-1}, de b.
Par suite $i = -a \,.\, b^{-1}$ et $i \in \mathbb{R}$, ce qui n'est pas.
Il en résulte $b = 0$, puis $a = 0$.
Réciproquement, $b = 0$ implique $ib = 0$ (puisque $\mathbb{C}$ est un corps).
Par suite, si, de plus, $a = 0$, alors $a + ib = 0$.

C_3 Plus généralement, dans *E* : $\mathbf{a + ib = a' + ib'} \iff \begin{cases} \mathbf{a = a'} \\ \mathbf{b = b'} \end{cases}$

En effet, puisque E a une structure de corps,
$$a + ib = a' + ib' \iff (a - a') + i\,(b - b') = 0.$$
D'après C_2 ceci équivaut à : $a = a'$ et $b = b'$.

C_4 Dans *E*, l'addition est telle que :

$$\mathbf{(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)}$$

En effet, par associativité et commutativité de la loi + :
$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + (ib_1 + ib_2).$$
La distributivité de la loi . sur la loi + conduit à : $(ib_1 + ib_2) = i(b_1 + b_2)$
d'où le résultat.

C_5 Dans *E*, la multiplication est telle que :

$$\mathbf{(a_1 + ib_1)\,.\,(a_2 + ib_2) = a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1)}$$

En effet, la distributivité de la multiplication sur l'addition conduit à :
$$(a_1 + ib_1)\,.\,(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + a_1ib_2 + ib_1a_2 + ib_1ib_2.$$
L'associativité de + et de $\times$, la commutativité de + et $\times$ et la relation $i^2 = -1$, conduisent à : $(a_1 + ib_1)\,.\,(a_2 + ib_2) = a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1)$.

3. L'ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES

• DÉFINITION

D'après C_2, à tout couple (a, b) de nombres réels correspond un élément unique de l'ensemble E. Si l'on désigne par z cet élément [on note $z = (a, b)$] les conditions C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 conduisent à définir dans l'ensemble $\mathbb{R}^2$, des couples de nombres réels, les opérations suivantes :

— **l'égalité,** définie comme toujours entre deux couples (cf. 3e leçon), par

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases} \quad \text{si } z_1 = (a_1, b_1) \quad \text{et} \quad z_2 = (a_2, b_2)$$

— **l'addition** (notée $+$) : si $z_1 = (a_1, b_1)$ et $z_2 = (a_2\ b_2)$ alors,

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

— **la multiplication** (notée $\times$) : si $z_1 = (a_1, b_1)$ et $z_2 = (a_2, b_2)$ alors,

$$z_1 \times z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2)$$

L'ensemble des couples de nombres réels, structuré comme il vient d'être dit est appelé **ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.**

4. LE GROUPE COMMUTATIF $(\mathbb{C}, +)$

• COMMUTATIVITÉ DE L'ADDITION

Soit $z_1 = (a_1, b_1)$ et $z_2 = (a_2, b_2)$.
Alors $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$
et $z_2 + z_1 = (a_2 + a_1, b_2 + b_1)$.
De la commutativité de l'addition des réels, résulte celle de l'**addition des nombres complexes.**

Donc : $\forall z_1 \in \mathbb{C} \quad \forall z_2 \in \mathbb{C} \quad z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

● ASSOCIATIVITÉ DE L'ADDITION

Soit $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$ et $z_3 = (a_3, b_3)$.
Par définition de l'addition :

$$(z_1 + z_2) + z_3 = [(a_1 + a_2) + a_3, (b_1 + b_2) + b_3]$$

et
$$z_1 + (z_2 + z_3) = [a_1 + (a_2 + a_3), b_1 + (b_2 + b_3)].$$

La propriété résulte de l'associativité de l'addition dans $\mathbb{R}$.

Donc : $\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}$ $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

On notera donc $z_1 + z_2 + z_3$ (sans parenthèses).

● ÉLÉMENT NEUTRE

Quel que soit $z = (a, b)$, $(a, b) + (0, 0) = (a, b)$.
Donc **l'élément (0, 0) est neutre dans $\mathbb{C}$ pour l'addition :**

$\forall z \in \mathbb{C}$ $z + (0, 0) = z$

● SYMÉTRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Quel que soit $z = (a, b)$, considérons $z' = (-a, -b)$.
Alors $z + z' = (a - a, b - b) = (0, 0)$.
Tout nombre complexe admet un symétrique (*ou opposé*).
Les nombres complexes (a, b) et $(-a, -b)$ sont dits *opposés*.

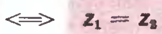
D'où l'énoncé (cf. 7e leçon, § 1) :

THÉORÈME. **$(\mathbb{C}, +)$ est un groupe commutatif**

● CONSÉQUENCES DE LA STRUCTURE DE GROUPE ADDITIF

1° **Tout nombre complexe est régulier pour l'addition,** c'est-à-dire :

$\forall (z_1, z_2, z) \in \mathbb{C}^3$ $z_1 + z = z_2 + z \iff z_1 = z_2$



Cette propriété a été démontrée 7e leçon (§ 2, propriété P_1) pour tout groupe.
On peut faire ici une démonstration directe en ajoutant l'opposé de z aux deux nombres complexes égaux $(z_1 + z)$ et $(z_2 + z)$.

2° **Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes, l'équation en z,** $z_1 + z = z_2$ **a une solution unique.**

Cette propriété a été démontrée 7e leçon (§ 2, propriété P_2) pour tout groupe.
On peut faire ici une démonstration directe en ajoutant aux deux membres l'opposé de z_1.

La solution unique est z = opposé de $z_1 + z_2$ noté $z = -z_1 + z_2$ ou $z = z_2 - z_1$ (grâce à la commutativité de l'addition).

On dit aussi que l'on soustrait z_1 de z_2. Donc, **dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes la soustraction est toujours possible.**

Si $z_2 = (a_2, b_2)$ et $z_1 = (a_1, b_1)$ alors $z_2 - z_1 = (a_2 - a_1, b_2 - b_1)$.

• DEUX SOUS-GROUPES DE $(\mathbb{C}, +)$

D'après la définition de l'addition, tout nombre complexe $z = (a, b)$ s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{z = (a, 0) + (0, b)}$$

Désignons par $(\mathbb{C}_1)$ et $(\mathbb{C}_2)$ les sous-ensembles de $\mathbb{C}$ ainsi définis :

$$(\mathbb{C}_1) = \{z; \quad z = (a, 0) \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}\}$$
$$(\mathbb{C}_2) = \{z; \quad z = (0, b) \quad \text{avec} \quad b \in \mathbb{R}\}.$$

Démontrons que **$(\mathbb{C}_1, +)$ et $(\mathbb{C}_2, +)$ sont des sous-groupes de $(\mathbb{C}, +)$.**

Cela signifie que la restriction de la loi $+$ à $\mathbb{C}_1$ [resp. $(\mathbb{C}_2)$] munit $\mathbb{C}_1$ [resp. $\mathbb{C}_2$)] d'une structure de groupe ; c'est-à-dire que :

la loi est **interne** (la somme de deux éléments de $\mathbb{C}_1$ [resp. $(\mathbb{C}_2)$] appartient à $\mathbb{C}_1$) ;
associative ;
que **l'élément neutre** appartient à $(\mathbb{C}_1)$ [resp. à $(\mathbb{C}_2)$] ;
que tout élément de $\mathbb{C}_1$ [ou $(\mathbb{C}_2)$] admet un **symétrique** dans $\mathbb{C}_1$ [ou $(\mathbb{C}_2)$].
Toutes ces propriétés se démontrent immédiatement.

• Première écriture simplifiée d'un nombre complexe.

— Soit $(x, 0)$ un élément de $\mathbb{C}_1$ et φ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}_1$ telle que :

$$x \in \mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \varphi(x) = (x, 0).$$

L'application φ est injective car : $(x, 0) = (x', 0)$ implique $x = x'$.

L'application φ est surjective, car, quel que soit $u \in (\mathbb{C}_1)$ cet élément est image, par φ, d'un réel. En effet, si $u = (\alpha, 0)$ alors $\varphi(\alpha) = u$.

L'application φ est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $(\mathbb{C}_1)$.

De plus, quels que soient les réels x_1 et x_2

$$\varphi(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2, 0)$$
$$= (x_1, 0) + (x_2, 0) \text{ (définition de l'addition)}$$

Donc $$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2).$$

— Il n'y a donc pas de confusion à *identifier* le nombre complexe complexe (élément de $\mathbb{C}_1$), $(a, 0)$, avec le réel a.
En particulier $(0, 0)$ sera noté 0 et $(1, 0)$ sera noté 1.

C'est ce qui conduit à l'écriture simplifiée du nombre complexe $\mathbf{z = (a, b)}$

sous la forme : $\mathbf{z = a + (0, b)}$

5. LE GROUPE COMMUTATIF ($\mathbb{C}^*$, .)

• ASSOCIATIVITÉ DE LA MULTIPLICATION

$\forall(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$ $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$

Posons $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$, $z_3 = (a_3, b_3)$.
Alors $z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2, \ a_1b_2 + a_2b_1)$
et $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = (a_1a_2a_3 - a_1b_2b_3 - a_2b_1b_3 - a_3b_1b_2,$
$a_2a_3b_1 + a_3a_1b_2 + a_1a_2b_3 - b_1b_2b_3)$,
expression dans laquelle a_1, a_2, a_3 jouent le même rôle, ainsi que b_1, b_2, b_3.
Par suite $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$, que l'on note, sans parenthèses, $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$.

• COMMUTATIVITÉ DE LA MULTIPLICATION

$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

Posons $z_1 = (a_1, b_1)$ et $z_2 = (a_2, b_2)$.
Alors $z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$
et $z_2 \cdot z_1 = (a_2a_1 - b_2b_1, a_2b_1 + a_1b_2)$.
La propriété résulte de la commutativité des lois $+$ et $\times$ dans $\mathbb{R}$.

• L'ÉLÉMENT (1, 0) EST NEUTRE POUR LA MULTIPLICATION

En effet, quel que soit $z = (a, b)$, par définition de la multiplication :

$(1, 0) \cdot (a, b) = (1.a - 0.b, 1.b + 0.a)$
$(1, 0) \cdot (a, b) = (a, b)$.

• TOUT NOMBRE COMPLEXE, DIFFÉRENT DE (0, 0), EST INVERSIBLE

En effet, le nombre complexe $z = (a, b)$ est inversible s'il existe $z' = (x, y) \in \mathbb{C}$ tel que :

$$(a, b) \ . \ (x, y) = (1, 0)$$

Ce qui *équivaut à* :
$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

1° **Si $a^2 + b^2 \neq 0$**, le système (1) admet la solution unique :

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2} \qquad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

L'inverse de z est noté $\frac{1}{z}$. Donc, si $a^2 + b^2 \neq 0$, l'inverse de $z = (a, b)$ est :

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right).$$

2° **Si $a^2 + b^2 = 0$,** le système (1) n'a pas de solution :
$0x - 0y = 1$ n'est vérifié pour aucun couple $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

D'où le **théorème :**

$\mathbb{C} - \{(0, 0)\} = \mathbb{C}^*$ est un groupe multiplicatif commutatif

• CONSÉQUENCES DE LA STRUCTURE DE GROUPE MULTIPLICATIF

1° *Tout nombre complexe, distinct de* (0, 0), *est régulier pour la multiplication* :

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \quad \forall z \in \mathbb{C}^* \quad z_1 \cdot z = z_2 \cdot z \implies z_1 = z_2$$

En effet : si $z = (0, 0)$, $z_1 \cdot z = z_2 \cdot z$ quels que soient z_1 et z_2.
si $z \neq (0, 0)$, il admet un inverse, soit z'.
Donc $z_1 \cdot z = z_2 \cdot z \implies (z_1 \cdot z) \cdot z' = (z_2 \cdot z) \cdot z'$
et par suite $z_1 = z_2$.

2° *Dans* $\mathbb{C}^*$, *l'équation* (*en* z), $z_1 \cdot z = z_2$ *admet une solution unique.*

On démontre comme ci-dessus (§ 4) que la solution unique est $z_2 \times \frac{1}{z_1}$

que l'on note $\frac{z_2}{z_1}$. Autrement dit, dans $\mathbb{C}^*$ la *division* est toujours possible.

• UN SOUS-GROUPE DE ($\mathbb{C}^*$, .)

Démontrons que $(\mathbb{C}_1^*, \cdot)$ *est un sous-groupe de* $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.
— La multiplication est une opération interne dans $(\mathbb{C}_1^*, \cdot)$.
En effet, si $u_1 = (x, 0)$ et $u_2 = (x, 0)$ alors $u_1 \cdot u_2 = (x_1 x_2, 0) \in \mathbb{C}_1^*$;
— L'élément unité $(1, 0) \in \mathbb{C}_1^*$;
— Si $u = (x, 0) \in \mathbb{C}_1^*$, alors $\frac{1}{u} = \left(\frac{1}{x}, 0\right) \in \mathbb{C}_1^*$.

REMARQUE

$(\mathbb{C}_2^*, \cdot)$ **n'est pas** un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. Il est possible de donner diverses conditions suffisantes de ce résultat, par exemple : $(1, 0) \notin \mathbb{C}_2^*$.

NOUVELLE ÉCRITURE SIMPLIFIÉE DES NOMBRES COMPLEXES

Considérons l'application φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}_1$ (définie au § 4) telle que

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(x) = (x, 0).$$

Nous savons que φ est une *bijection*.

$$\text{Or } \varphi(x_1 \cdot x_2) = (x_1 x_2, 0)$$
$$= (x_1, 0) \cdot (x_2, 0)$$
$$= \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2)$$

Donc la convention posée (§ 4), à savoir : écrire a, le complexe $(a, 0)$ (élément de $\mathbb{C}_1$) est conforme aux propriétés de la multiplication.

Or, quel que soit le réel b, $(0, b) = (b, 0) \,.\, (0, 1)$
Par suite $(0, b) = b \,.\, (0, 1)$
Ceci conduit à écrire le nombre complexe $z = (a, b)$ sous la forme simplifiée :

$$\mathbf{z = a + b \cdot (0, 1)}$$

6. LE CORPS $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

DISTRIBUTIVITÉ DE LA MULTIPLICATION SUR L'ADDITION

$$\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \qquad z_1 \,.\, (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

Posons : $z_1 = (a_1, b_1)$ $z_2 = (a_2, b_2)$ $z_3 = (a_3, b_3)$.

$$\text{Alors : } z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (a_1, b_1) \cdot (a_2 + a_3, b_2 + b_3)$$
$$= [(a_1(a_2 + a_3) - b_1(b_2 + b_3, a_1(b_2 + b_3) + b_1(a_2 + a_3)]$$
$$= (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2) + (a_1a_3 - b_1b_3, a_1b_3 + b_1a_3)$$
$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3.$$

Il résulte des propriétés démontrées (§ 4, 5, 6) que :

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un corps commutatif

ÉCRITURE DÉFINITIVE DES NOMBRES COMPLEXES

Si $z = (a, b)$, nous avons démontré que $z = a + b \cdot (0, 1)$.
Désignons par i le nombre complexe égal à $(0, 1)$, alors :

$$\mathbf{z = a + bi}$$

On désigne par : *partie imaginaire* de z, le réel b ; *partie réelle de* z, le réel a.

• RÈGLES DE CALCUL DANS $\mathbb{C}$

Il n'y a aucune règle de calcul à retenir : on *calcule dans* $\mathbb{C}$ *comme dans tout corps commutatif*. Puisque le corps $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ des complexes a été obtenu par *adjonction* du symbole i au corps $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, il suffit donc de connaître les **puissances successives** de i.

Or si $i = (0, 1)$ $\quad$ $i^2 = (0, 1) \times (0, 1) = (-1, 0) = -1.$

Par suite $i^3 = i^2 \times i = -i$ $\quad$ et $\quad$ $i^4 = i^2 \times i^2 = (-1) \times (-1) = +1.$

Plus généralement, si $n \in \mathbb{N}$:

$$i^{4n} = 1 \qquad i^{4n-1} = i \qquad i^{4n+2} = -1 \qquad i^{4n+3} = -i$$

Il résulte de là :

— *Addition* : $\quad (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2).$

— *Multiplication* : $(a_1 + ib_1) \times (a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 + i^2b_1b_2$

$$= a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + b_1a_2).$$

— *Division* : Nous avons démontré que l'inverse de $z = (a, b)$ (avec $z \neq 0$) est

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) \text{ (§ 5)},$$

C'est-à-dire que l'inverse du nombre complexe $a + ib$ est $\dfrac{a}{a^2 + b^2} - i\dfrac{b}{a^2 + b^2}.$

Or $a^2 + b^2 = (a + ib) \cdot (a - ib).$

D'où l'idée d'associer au nombre complexe $(a + ib)$ le nombre complexe $(a - ib)$ noté $\bar{z}$ et appelé *complexe conjugé* de z. Alors :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot \bar{z}$$

Plus généralement, $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2}.$

Par suite si $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + b_2$, alors $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 - ib_2)}{(a_2)^2 + (b_2)^2}$

soit

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1\,a_2 + b_1\,b_2 + i(b_1\,a_2 - a_1\,b_2)}{(a_2)^2 + (b_2)^2}$$

7. RETOUR SUR LE PROBLÈME POSÉ

Le problème que nous nous étions posé, nous a conduits à construire un nouvel ensemble, celui $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Il reste à vérifier que cet ensemble est bien une *solution du problème*.

• Or $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *est un corps commutatif dont* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *est un sous-corps* (§ 6).

• Il reste à démontrer que, dans $\mathbb{C}$, **l'équation $z^2 = \zeta$, avec $\zeta \in \mathbb{C}$, a une solution au moins.**

Soit $\zeta = a + ib$ le nombre complexe donné ; posons $z = x + iy$.
Alors $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$.

L'équation $z^2 = \zeta$ *équivaut au système* $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$

Ce système *implique* $\begin{cases} x^2 + (-y^2) = a \\ x^2 \cdot (-y^2) = -\dfrac{b^2}{4} \end{cases}$

Donc (x^2) et $(-y^2)$, s'ils existent, sont les solutions (réelles) de l'équation :

$$X^2 - aX - \frac{b^2}{4} = 0.$$

Or cette équation a toujours deux racines réelles distinctes ou confondues (discriminant $a^2 + b^2$ positif ou nul). Si elles sont distinctes, l'une des racines est *positive*, l'autre est *négative* (produit négatif). Soit X' la racine positive, X'' la racine négative. Alors les relations $x^2 = X'$ et $-y^2 = X''$ conduisent à

$x = \sqrt{X'}$ ou $x = -\sqrt{X'}$ et à $y = \sqrt{-X''}$ ou $y = -\sqrt{-X''}$.

Or $2xy = b$. Donc le *signe du produit* xy est déterminé.
Ce qui prouve qu'à $x = \sqrt{X'}$ correspond une *et une seule* des possibilités, par exemple $y = \sqrt{-X''}$. Alors à $-\sqrt{X'}$ correspond $-\sqrt{-X''}$.
Réciproquement, les nombres complexes :

$z_1 = \sqrt{X'} + i\sqrt{X''}$ et $z_2 = -\sqrt{X'} - i\sqrt{X''}$ vérifient bien l'équation proposée.

Il suffit de calculer $(z_1)^2$ et $(z_2)^2$.

● **En conclusion, tout nombre complexe est un carré, donc l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est bien une solution du problème posé.**



EXERCICES

12-1 Mettre sous forme $x + iy$ les nombres complexes suivants :

$$\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i} \qquad \frac{1-i}{1+i} \qquad \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^9 \qquad \left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} + \left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} - 1\right)\right)^{11}$$

$$z = \frac{1 + ri}{2r + (r^2 - 1)i} \qquad (\text{avec } r \in \mathbb{R}).$$

12-2 Soit $z = x + iy$, et $Z = \dfrac{z^2}{z + i}$.

Calculer en fonction de x et y, les parties réelle et imaginaire de Z.

12-3 Pour les lois $+$ et $\cdot$, l'ensemble $A = \{z ; z = iy, \text{ avec } y \in \mathbb{R}\}$ a-t-il une structure particulière ?

12-4 Soit $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

1° Calculer $\bar{j}$, j^2, j^3, j^n (avec $n \in \mathbb{N}$), $1 + j + j^2$.

2° Etablir que :

$\forall (z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, $z^3 + z'^3 = (z + z') \cdot (z j + z'\bar{j}) \cdot (z\bar{j} + z' j)$

3° Effectuer et simplifier le produit :

$$(a + b + c) \cdot (a + bj + cj^2) \cdot (a + bj^2 + cj)$$

12-5 Dans $\mathbb{C}$, montrer que $(z + i)$ est en facteur dans $z^2 + 2z + 2i + 1$.
Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 + 2z + 2i + 1 = 0$.

12-6 Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$, le système :

$$\begin{cases} (1 + i)z - iz' = 2 + i \\ (2 + i)z + (2 - i)z' = 2i. \end{cases}$$

12-7 Trouver les nombres complexes z tels que :

(1) $z^2 = -3 + 4i$ (2) $z^2 = -5 + 12i$

(3) $z^2 = 1 + 4i\sqrt{3}$ (4) $z^2 = 1 - 2i\sqrt{2}$

12-8 Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, les équations

(1) $z^4 = 1 + i$ (2) $z^4 = 24i - 7.$

12-9 Peut-on déterminer des nombres complexes z tels que :

1° $(z - 1) \cdot (\bar{z} - i)$ soit un nombre réel ?

2° La partie réelle de $(z - 1) \cdot (\bar{z} - i)$ soit nulle ?

12-10 1° Déterminer les nombres complexes ω tels que $\omega^2 = 5 + 12i$.

2° Dans $\mathbb{C}$, on pose $y = z^2 + 2(1 + i)z - 5(1 + 2i)$.
Démontrer qu'il existe un nombre complexe ζ tel que $y = (z + \zeta)^2 - \omega^2$.

3° En déduire les solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation :

$$z^2 + 2(1 + i)z - 5(1 + 2i) = 0.$$

INDICATIONS

12-1 $$\frac{(\sqrt{3} - i)}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} - i)(1 - i\sqrt{3})}{(1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})} = \frac{-4i}{-2} = 2i$$

Donc $$\left(\frac{\sqrt{3} - i}{1 + i\sqrt{3}}\right)^9 = 2^9 i.$$

12-4 1° $j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{j}$ $\quad 1 + j + j^2 = 0.$

12-7 (2) Posons $z = a + ib$ alors $z^2 = a^2 - b^2 + 2\,ab\,.\,i$

Par suite $z^2 = -5 + 12i \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -5 \\ ab = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 + (-b^2) = -5 \\ a^2(-b^2) = -36 \\ ab > 0 \end{cases}$

D'où a et b sont solutions de l'équation $X^2 + 5X - 36 = 0$; soit $X' = -9$, $X'' = +4$

Et $\begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 9 \\ ab > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -2 \\ b = -3 \end{cases} \end{cases}$

Par suite les racines carrées de $-5 + 12i$ sont $\begin{cases} 2 + 3i \\ -2 - 3i \end{cases}$

12-8 Poser $z^2 = Z$. Alors $Z^2 = 1 + i$ permet de déterminer Z. Puis $z^2 = Z$ (Z connu), permet de déterminer z.

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS NUMÉRIQUES

13

● *La notion de fonction a été étudiée dans la* 5[e] *leçon et depuis lors souvent utilisée.*

Quel est alors l'objet de cette leçon ?

● *Il s'agit essentiellement de* **réviser** *et de* **compléter** *sur certains points, l'étude, effectuée en classe de Première, d'une famille particulièrement importante de fonctions* : **celles pour lesquelles les ensembles de départ et d'arrivée sont des sous-ensembles de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.**

● *Bien entendu toutes les propriétés démontrées dans la* 5[e] *leçon sont encore valables pour ces fonctions, mais la structure particulière de l'ensemble* $\mathbb{R}$ *permet de compléter ces propriétés.*

● *Le plan d'étude de cette leçon est le suivant :*

— *définition des fonctions numériques ;*

— *rappel des propriétés de l'ensemble* $\mathbb{R}$ *des réels (cf.* 7[e] *et* 8[e] *leçons) ;*

— *opérations sur les fonctions numériques ;*

— *propriétés des fonctions numériques (limites ; continuité) ;*

— *application réciproque d'une application numérique bijective.*

1. FONCTIONS NUMÉRIQUES

1° DÉFINITION



● On appelle *fonction numérique d'une variable réelle*, **toute fonction pour laquelle l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée sont des sous-ensembles de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.**

Dans cet ouvrage, nous emploierons l'expression abrégée **fonction numérique** pour fonction numérique d'une variable réelle.

EXEMPLES

❶ La fonction f qui, à tout nombre réel positif x, fait correspondre le nombre réel positif dont le carré est égal à x, est une fonction numérique, notée $\sqrt{\ }$.

Ainsi : $$x \overset{\sqrt{\ }}{\longmapsto} \sqrt{x}.$$

Ensemble de départ : $\mathbb{R}^+$.

Ensemble d'arrivée : $\mathbb{R}^+$.

❷ La fonction f qui, à tout nombre réel x, fait correspondre le plus grand entier inférieur (au sens large) à x, est une fonction numérique, appelée **« partie entière de... »** et notée parfois E.

Ainsi : $$x \overset{E}{\longmapsto} E(x).$$

Ensemble de départ : $\mathbb{R}$.

Ensemble d'arrivée : $\mathbb{Z}$ (ensemble des entiers relatifs).

Par exemple
- si $x = -3$ $\quad E(x) = -3$.
- si $x = \frac{4}{3}$ $\quad E(x) = 1$.

❸ La fonction f qui, à tout nombre réel x, fait correspondre le nombre réel $x - E(x)$ est une fonction numérique, notée parfois m (fonction **mantisse**). Alors :

$$x \overset{m}{\longmapsto} m(x) = x - E(x).$$

Ensemble de départ : $\mathbb{R}$.

Ensemble d'arrivée : $[0, 1[$.

2° ENSEMBLE DE DÉFINITION D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

- La définition d'une fonction comporte trois données (cf. 5e leçon) :
  - *a*) l'ensemble de départ ;
  - *b*) l'ensemble d'arrivée ;
  - *c*) la relation entre un élément quelconque de l'ensemble de départ et son image.

Or, dans le cas des fonctions numériques et lorsque « l'image » s'obtient par une chaîne d'opérations (addition, multiplication, ..., racine carrée, ...), on rencontre souvent, dans l'enseignement élémentaire, des problèmes « incomplets » dans lesquels *n'est pas précisé l'ensemble de départ*. L'étude de celui-ci fait alors partie de « *l'étude de la fonction* » ; c'est ce qu'on appelle *déterminer l'ensemble de définition de la fonction*. Ce qui signifie en fait : déterminer le sous-ensemble *maximal* (pour l'inclusion) de $\mathbb{R}$, dans lequel l'expression donnée pour $f(x)$ a effectivement un sens.

C'est cette façon de procéder, souvent ambiguë, qui nous a conduits à distinguer entre **application** définie sur un ensemble E, et **fonction** définie dans l'ensemble E.

EXEMPLES

❶ **La fonction numérique f « définie » par $f(x) = \frac{1}{x}$** *n'est, en fait, définie que* sur $\mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$, puisque seuls les éléments non nuls de $\mathbb{R}$ sont inversibles.

Comme il est possible d'envisager d'autres fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que,

g définie par $\begin{cases} g(x) = \frac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \text{et} \\ g(0) = 0 \end{cases}$ ou h définie par $\begin{cases} h(x) = \frac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \text{et} \\ h(0) = 1 \end{cases}$

fonctions différentes entre elles et différentes de **f**, **il est utile de préciser l'ensemble de définition envisagé.**

❷ **La fonction numérique f** « définie » par $\mathbf{f(x)} = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ est, en fait, définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

En effet, pour $x \neq 1$, la formule donnée définit l'image de x. Par contre, pour $x = 1$, la formule est dépourvue de sens.

L'ambiguïté *ainsi créée conduit parfois à des recherches « d'interprétations »*, telles que :

— si $x \neq 1$, $\frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1$;
on peut alors considérer qu'il en est de même pour $x = 1$.
Mais, dans cette interprétation, il s'agit de la fonction **g** définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \overset{g}{\rightarrow} g(x) = x^2 + x + 1$$

— On pourrait, aussi bien, considérer l'application h, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $h(1) = 100$ et, pour $x \neq 1$, $h(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$.

• REMARQUE

Dans l'interprétation traditionnelle, la détermination de l'ensemble de définition d'une fonction numérique fait souvent intervenir les opérations définies **seulement** pour certains éléments de $\mathbb{R}$.

Par exemple :

— la *division*, pour laquelle **le diviseur doit être non nul** ;

— la *racine carrée*, pour laquelle **le radicande doit être positif** (au sens large).

2. L'ENSEMBLE $\mathbb{R}$ DES NOMBRES RÉELS

1° Puisque nous envisageons l'étude de fonctions d'une partie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, il s'agit d'abord de rappeler (cf. 7e leçon) les propriétés, que nous admettons, de $\mathbb{R}$ et de définir certaines parties, importantes, de $\mathbb{R}$.

L'ensemble — noté $\mathbb{R}$ — dont les éléments sont appelés **nombres réels**, *est tel que* :

- $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$ *est un corps commutatif totalement ordonné.*

  Rappelons que, dans $\mathbb{R}$, la relation $a < b$ (lue « a strictement inférieur à b ») équivaut à $\begin{cases} a \leqslant b \\ a \neq b. \end{cases}$

- *Dans* $\mathbb{R}$, *toute partie majorée admet une borne supérieure.*

  On dit qu'une partie A (sous-ensemble) de $\mathbb{R}$ est majorée, s'il existe au moins un réel M (appelé majorant) tel que : $\forall x \in A, \quad x \leqslant M$ (cf. 8e leçon).

  S'il existe un majorant (soit b) plus petit que tous les autres, on dit que b est **la borne supérieure de A.**

  Nous admettrons que cet axiome permet de démontrer le résultat suivant :
  dans $\mathbb{R}$, toute partie minorée admet une borne inférieure.

2° INTERVALLES OUVERTS

EXEMPLE

L'ensemble des réels x tels que $-1 < x < 2$ s'appelle **intervalle ouver** $-1, 2$ et se note $]-1, 2[$.

D₁ *Si* **a** $\leqslant$ **b**, *on appelle* **intervalle ouvert a, b,** *et on note*]**a, b**[*l'ensemble*

$$]a, b[= \{x ; \quad x \in \mathbb{R}, \quad a < x < b\}$$

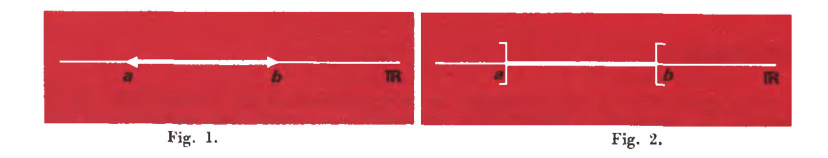


Fig. 1. Fig. 2.

Nous le représenterons par la figure 1 ou la figure 2.

Notons que l'ensemble réduit à un seul élément, $\{x_0\}$, n'est pas un intervalle ouvert dans $\mathbb{R}$, mais que l'ensemble $]a, a[= \varnothing$ est un intervalle ouvert.

- **Intervalles ouverts et distance.**

Reprenons l'exemple ci-dessus. L'intervalle]— 1, 2[peut être considéré comme **l'ensemble des réels x situés** à une « **distance** » inférieure à $\frac{3}{2}$ de la valeur $\frac{1}{2}$ (on dit du « **point** $\frac{1}{2}$ ») : en effet si $-1 < x < 2$, alors $\left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{3}{2}$.

Le nombre $\frac{1}{2}$ s'appelle le **centre** de l'intervalle et $\frac{3}{2}$ en est le **rayon.**

D'où la **définition** :

D'₁ **Dans** $\mathbb{R}$, **l'intervalle ouvert** $\mathcal{J}$ de **centre** x_0 et de **rayon** h (avec h réel strictement positif) *est l'ensemble* :

$$\mathcal{J} = \{ x ; \quad d(x_0, x) < h \} =]x_0 - h, \quad x_0 + h[$$

3° INTERVALLE FERMÉ OU SEGMENT

EXEMPLE

L'ensemble des réels x tels que $-1 \leqslant x \leqslant 2$ est l'**intervalle fermé,** ou **segment** — 1, 2. On le note [— 1, 2].

D₂ *Dans* $\mathbb{R}$, on appelle **intervalle fermé** a, b ou **segment** a, b, et on note $[a, b]$ l'ensemble :

$$[a, b] = \{ x ; \quad a \leqslant x \leqslant b \}$$

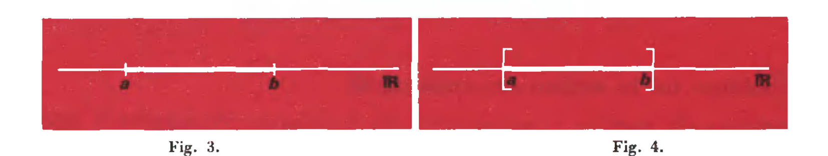


Fig. 3. Fig. 4.

Nous le représenterons par les figures 3 ou 4.

4° VOISINAGES D'UN « POINT » DE $\mathbb{R}$

D₃ **Si $x_0 \in \mathbb{R}$, on appelle voisinage de x_0, toute partie V de $\mathbb{R}$ telle qu'il existe un intervalle ouvert, comprenant x_0, et inclus dans V.**

EXEMPLES

❶ Le segment $V = [\sqrt{2}, 3]$ (fig. 5) est un voisinage de 2, car, par exemple,

$$\left]\frac{3}{2}, 3\right[\subset V$$

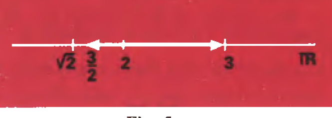


Fig. 5.

❷ **Dans ℝ, tout intervalle ouvert est voisinage de chacun de ses points.**

5° DROITE NUMÉRIQUE ACHEVÉE

• Section commençante ; section finissante.

Afin de pouvoir considérer tous les nombres réels inférieurs, strictement, ou supérieurs, strictement, au réel *a* donné, on pose les définitions suivantes :

D₄ Dans ℝ, l'ensemble $\{x ; \quad a < x\}$ est appelé **section finissante ouverte de a** ; on note $]a, \rightarrow[$;

l'ensemble $\{x ; \quad x < a\}$ est la **section commençante ouverte de a** ;

on note $]\leftarrow, a[$.

Ces ensembles sont représentés figures 6 et 7.



Fig. 6. Fig. 7.

• Extension de la notion de voisinage.

Les notions de section commençante ou finissante conduisent à *adjoindre à l'ensemble* ℝ deux symboles :

$+\infty$ qui se lit : « *plus l'infini* »,

et $-\infty$ qui se lit : « *moins l'infini* ».

Notons que $+\infty$ **et** $-\infty$ **ne sont pas des éléments de ℝ.** Par suite, ils ne peuvent figurer ni dans une égalité de nombres réels, ni dans une loi de composition, $+$ ou $.$, dans ℝ.

D₅ Par **définition :**

l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, noté $\overline{\mathbb{R}}$ est appelé **droite numérique achevée.**

Par convention, l'ordre total de $\mathbb{R}$ est **prolongé** à $\overline{\mathbb{R}}$ comme suit :

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, l'ordre dans $\overline{\mathbb{R}}$ est celui de $\mathbb{R}$;
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $-\infty < x$
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x < +\infty$

Nous admettrons que :
Toute section finissante est un voisinage de $+\infty$; toute section commençan est un voisinage de $-\infty$.
On note : $V_{+\infty}$ et $V_{-\infty}$ un voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.
Conformément au 2°, on note aussi : $]a, +\infty[$ et $]-\infty, a[$, les sections finissantes et commençantes ouvertes de a.

- **Sections commençantes ou finissantes fermées.**

D₆ Dans $\mathbb{R}$, on appelle **section finissante fermée** de a, l'ensemble, noté :

$[a, +\infty[$ et égal à $\{x ; a \leqslant x\}$

Nous le représenterons par la figure 8.

Dans $\mathbb{R}$, on appelle **section commençante fermée** de a, l'ensemble noté :

$]-\infty, a]$ et égal à $\{x ; x \leqslant a\}$

Nous le représenterons par la figure 9.

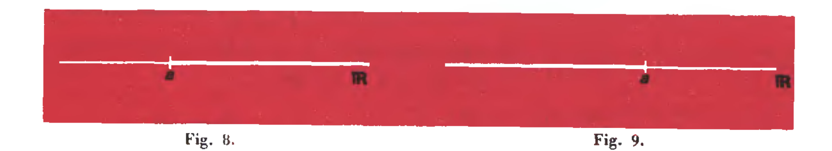


Fig. 8. Fig. 9.

6° VOISINAGES DANS UN SOUS-ENSEMBLE DE $\mathbb{R}$

Les voisinages d'un « point » ont été définis dans $\mathbb{R}$. Or, nous aurons souvent l'occasion d'étudier une fonction définie sur **un sous-ensemble** $\mathbb{R}'$ de $\mathbb{R}$. Il est donc nécessaire de définir **les voisinages dans une partie $\mathbb{R}'$ de $\mathbb{R}$.**

D₇ *Si $\mathbb{R}'$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$,* on appelle **voisinages V'_{x_0} de x_0** ($\in \mathbb{R}'$), *les intersections de $\mathbb{R}'$ avec les voisinages V_{x_0} de x_0 dans $\mathbb{R}$.*



3. PARITÉ - PÉRIODICITÉ

1° PARITÉ

Soit f une fonction numérique dont nous désignons par E($\subset \mathbb{R}$) l'ensemble de définition.

- La fonction f est dite **paire** si, **quel que soit** x appartenant à E :

$$\begin{cases} -x \text{ appartient à } E ; \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$$

- De même, la fonction f est dite **impaire** si, **quel que soit** x appartenant à E :

$$\begin{cases} -x \text{ appartient à } E ; \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

Ces dénominations ont pour origine le fait que les fonctions monômes $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^4$, et les fonctions polynômes dont les monômes sont de degrés **pairs** possèdent la première propriété.

De même, les fonctions polynômes formées de monômes de degrés **impairs** possèdent la deuxième propriété.

Mais d'autres fonctions possèdent l'une ou l'autre de ces propriétés.

EXEMPLES

1. L'application f (...valeur absolue de...) de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^+$ telle que $f(x) = |x|$ est **paire.**

2. La fonction cosinus est une fonction **paire.**

3. Les fonctions sinus, tangente, sont des fonctions **impaires.**

4. L'application f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 + 1}$ est **impaire,** car :

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - (-x)}{(-x)^2 + 1} = \frac{-x^3 + x}{x^2 + 1}$$

$$f(-x) = -f(x)$$

5. La fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = \sin x + \cos x$ n'est **ni paire,** ni **impaire.**

2° PÉRIODICITÉ

- Une application f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est dite **périodique** et de **période** P, si P est le plus petit nombre réel strictement positif, tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x + P) = f(x)$$

EXEMPLES

❶ Les fonctions sinus, cosinus, tangente, cotangente, sont **périodiques** de périodes respectives 2π, 2π, π et π.

❷ La fonction **mantisse** (cf. § 1, 1°) est **périodique** de période 1.

En effet, $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad E(x+1) = E(x) + 1$.

Par suite si

$$f(x) = x - E(x)$$
$$f(x+1) = (x+1) - E(x+1)$$
$$f(x+1) = f(x)$$

❸ La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x - E(x)}$ est **périodique,** de période 1.

En effet, quel que soit x, $\quad E(x+1) = E(x) + 1$.

Donc $\quad \sqrt{(x+1) - E(x+1)} = \sqrt{x - E(x)}$

4. OPÉRATIONS DANS L'ENSEMBLE DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

● Dans $\mathbb{R}$, quels que soient les nombres y et z, sont définis les nombres :

$$y + z\,; \qquad y \cdot z\,; \qquad \frac{1}{z} \text{ et } \frac{y}{z} \text{ si } z \neq 0\,; \qquad \sqrt{y} \text{ si } y \geqslant 0$$

Par suite, si f et g sont deux applications de $F(\subset \mathbb{R})$ et G $(\subset \mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$, on définit les fonctions suivantes :

● **Somme de fonctions numériques.**

Si $F \cap G \neq \varnothing$, il existe une **application s,** de $F \cap G$ vers $\mathbb{R}$, telle que :

$$\forall x \in F \cap G \qquad s(x) = f(x) + g(x)$$

Cette application, notée $f + g$, est la **somme** des fonctions numériques f et g (fig. 10).

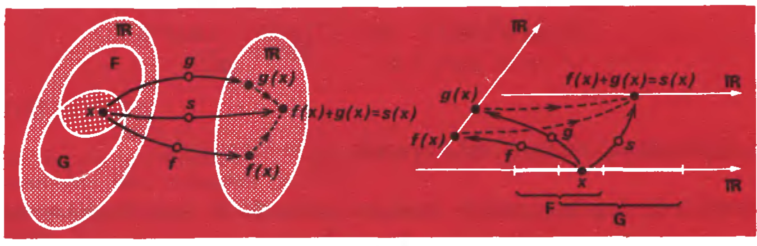


Fig. 10.

Donc : $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

On définit de même la somme d'un nombre quelconque de fonctions numériques.

• Produit de fonctions numériques.

Si $F \cap G \neq \emptyset$, il existe une **application** p, de $F \cap G$ dans $\mathbb{R}$, telle que :

$$\forall x \in F \cap G \qquad p(x) = f(x) \times g(x)$$

Cette application, notée $f.g$, est le **produit** des fonctions numériques f et g (fig. 11).

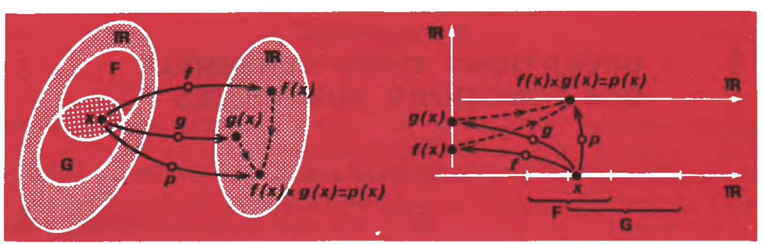


Fig. 11.

Donc : $(f \, . \, g)(x) = f(x) \times g(x)$

En particulier, si a est un nombre réel quelconque, la fonction **a.f** est définie par $(a \, . \, f)(x) = a \, . \, f(x)$.

On définit de même le produit d'un nombre quelconque de fonctions numériques.

• Inverse d'une fonction numérique.

Il existe une **application** h telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } x \in G \\ \text{et si } g(x) \neq 0, \end{array} \right. \qquad h(x) = \frac{1}{g(x)}$$

Cette **application,** notée $\frac{1}{g}$, est l'**inverse** de la fonction **g.**

En notant $\overset{-1}{g}(0)$ (cf. 3ᵉ leçon) le sous-ensemble de G dont les éléments ont pour image **zéro,** la fonction **inverse** est une application de $G - \overset{-1}{g}(0)$ vers $\mathbb{R}$.

• Quotient de deux fonctions numériques.

Si $F \cap G \neq \emptyset$, il existe une **application** q telle que :

$$\begin{cases} \text{si } x \in F \cap G \\ \text{et si } g(x) \neq 0, \end{cases} \qquad q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Cette application, notée $\frac{f}{g}$, est le **quotient** de f par g.

Donc :

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

La fonction quotient est une application de $(F \cap G) - \overset{-1}{g}(0)$ vers $\mathbb{R}$.

• Racine carrée d'une fonction numérique.

Nous admettons qu'il existe une **application** r telle que :

$$\begin{cases} \text{si } x \in F \\ \text{et si } f(x) \geqslant 0, \end{cases} \qquad r(x) = \sqrt{f(x)}$$

Cette application — notée $\sqrt{f}$ — est appelée **racine carrée** de la fonction f.

• Composée de fonctions numériques.

La composée — notée $g \circ f$ — de la fonction numérique f par la fonction numérique g, se définit comme pour toutes les fonctions (5e leçon), indépendamment de toute structure de l'ensemble d'arrivée.
Rappelons que :

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

5. REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

• DÉFINITION

Etant donné une fonction f, rappelons que le **graphe** de cette fonction est **l'ensemble des couples** $[x, f(x)]$.

Nous avons indiqué (5e leçon), plusieurs représentations possibles de ce graphe.

La fonction f étant *numérique*, on utilise le *graphe cartésien*, qui donne une *représentation géométrique* du graphe de la fonction. Considérons un plan $\mathfrak{T}$ rapporté à un repère cartésien $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. A chaque élément $[x, f(x)]$ du graphe est associé, de façon unique, **le point M de coordonnées x et y = f(x),** tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. L'ensemble $\mathcal{C}$ des points M s'appelle *représentation graphique cartésienne de la fonction numérique* (fig. 12).

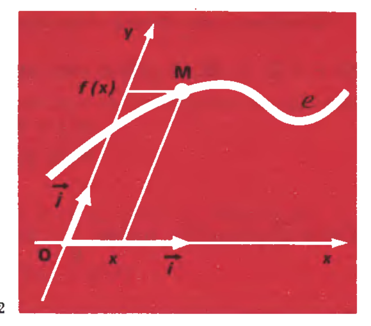


Fig. 12

REMARQUES

❶ L'image, par f, du nombre réel x étant **unique, la représentation graphique** $\mathcal{C}$ d'une fonction est rencontrée en un point, **au plus,** par une droite parallèle à l'axe des y, c'est-à-dire une droite dont $\vec{j}$ est un vecteur directeur (fig. 12). Mais, une parallèle à $x'Ox$ peut rencontrer $\mathcal{C}$ en plusieurs points, **sauf si** f est **injective.**

❷ Les points d'intersection, s'ils existent, de l'axe $x'Ox$ et de $\mathcal{C}$ ont des abscisses α telles que $f(\alpha) = 0$. Ce sont donc les solutions réelles de l'équation $f(x) \doteqdot 0$.

❸ **Si f est impaire,** les points $[x, f(x)]$ et $[-x, -f(x)]$ appartiennent simultanément à $\mathcal{C}$, donc **le point O est centre de symétrie de l'ensemble** ($\mathcal{C}$).

❹ **Si f est paire** et **si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux,** l'axe $y'Oy$ est **axe de symétrie de** ($\mathcal{C}$), car les points des coordonnées $[x, f(x)]$ et $[-x, f(x)]$ appartiennent simultanément à $\mathcal{C}$.

❺ **Si f est périodique,** de période P, les points $m_0, m_1, m_2, \ldots, m_k \ldots$ (fig. 13), ayant pour coordonnées $[x_0 + kP, f(x_0 + kP)$, avec $k \in \mathbb{Z}]$ se déduisent du point M $[x_0, f(x_0)]$ par les translations de vecteurs directeurs $k \,.\, P\,\vec{i}$ et appartiennent tous à la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f.

Autrement dit, la représentation graphique $\mathcal{C}$ s'obtient par les translations indiquées, à partir de l'image de $[x_0, x_0 + P[$, où x_0 est un réel arbitraire, mais fixé.

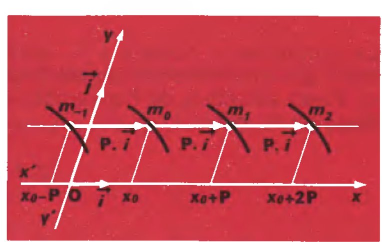


Fig. 13.

6. VARIATION DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

1° FONCTIONS CONSTANTES PAR INTERVALLES

Une fonction f *est dite* **constante** *sur un ensemble* E *si* :

quel que soit x ∈ E, **f(x) = a** avec a fixé

En particulier, *une fonction numérique* f *est dite constante par intervalles* (ou « *en escalier* ») s'il est possible de partager l'ensemble de départ en intervalles dans chacun desquels la fonction est constante.

EXEMPLES

❶ **Soit x le poids, en grammes, d'une lettre et f(x) la valeur, en centimes, de l'affranchissement.**

La fonction f telle que $x \mapsto f(x)$ est constante par intervalles.

En effet, au 1[er] janvier 1968, en France :

pour $0 < x \leqslant 20$ $\quad f(x) = 30$

pour $20 < x \leqslant 100$ $\quad f(x) = 70$

pour $100 < x \leqslant 250$ $\quad f(x) = 150$

pour $250 < x \leqslant 500$ $\quad f(x) = 200$.

D'où la représentation graphique (fig. 14).

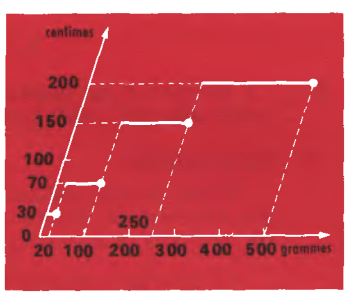


Fig. 14.

❷ Soit x un réel. Désignons par E(x), **la partie entière de x**, c'est-à-dire le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

Par exemple : si $x = 3$, $E(x) = 3$; si $x = 4{,}25$, $E(x) = 4$;

si $x = -12{,}35$, $E(x) = -13$.

Donc, si n et $(n + 1)$ sont les entiers relatifs **encadrant** x :

$$n \leqslant x < n + 1 \implies E(x) = n$$

La fonction qui, à x réel, associe sa partie entière est donc constante dans tout intervalle [n, n + 1[, fermé à gauche et ouvert à droite.

D'où la représentation graphique (fig. 15).

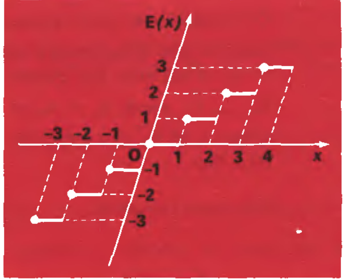


Fig. 15.

2° FONCTIONS CROISSANTES, FONCTIONS DÉCROISSANTES

● L'ensemble $\mathbb{R}$ étant totalement ordonné par la relation $\leqslant$, on étudie la compatibilité de cette relation avec les applications numériques.

Ce qui conduit aux définitions suivantes :

D₁ La fonction **f** est **croissante (au sens large)** sur $[a, b]$, si :

$$\forall x_1 \in [a, b] \quad \text{et} \quad \forall x_2 \in [a, b] \qquad x_1 \leqslant x_2 \implies f(x_1) \leqslant f(x_2)$$

D₂ La fonction **f** est **décroissante** (au **sens large**) sur $[a, b]$ si, dans les mêmes conditions : $x_1 \leqslant x_2 \implies f(x_1) \geqslant f(x_2)$

D'₁ La fonction **f** est **strictement croissante** sur $[a, b]$, si :

$$\forall x_1 \in [a, b], \quad \forall x_2 \in [a, b] \qquad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

D'₂ La fonction **f** est **strictement décroissante** sur $[a, b]$ si, dans les mêmes conditions :

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

D'₃ La fonction **f** est **monotone** dans un intervalle si, dans tout cet intervalle, elle est : soit croissante, soit décroissante, soit constante.

REMARQUES

❶ Étudier **le sens de variation** d'une fonction numérique f consiste à partager son ensemble de définition, si c'est possible, en intervalles tels que la restriction de f à chacun d'eux soit une fonction monotone.

❷ La monotonie d'une fonction est une **propriété globale,** c'est-à-dire définie dans un intervalle (et non une propriété locale, c'est-à-dire définie en un point).

❸ Pour étudier le sens de variation d'une fonction numérique, il est souvent commode d'étudier le **signe** du rapport $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)}$, **pour tout couple** (x_1, x_2) d'éléments d'un intervalle de définition.

Ce rapport est parfois appelé **rapport des variations entre x_1 et x_2.**

Notons que chacun des termes de ce rapport a une signification géométrique. Si M_1 et M_2 sont les points de coordonnées $[x_1, f(x_1)]$ et $[x_2, f(x_2)]$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, alors $x_2 - x_1$ et $f(x_2) - f(x_1)$ sont les **composantes scalaires** du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$. Le rapport lui-même est le coefficient directeur de la droite (M_1, M_2).

On pose souvent : $$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_1^2 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

7. EXTREMUMS RELATIFS

• POINT INTÉRIEUR A UN ENSEMBLE

Soit **f** une fonction numérique définie dans un ensemble E inclus dans $\mathbb{R}$.
Un « point » **c** *est dit* **intérieur** à E *s'il existe un intervalle ouvert, de centre* **c**, *inclus dans* E.

EXEMPLES

❶ Si E est un intervalle ouvert $]a, b[$, tout point de E est intérieur à E (les points a et b ne sont pas éléments de E).

❷ Si E est un segment $[a, b]$, tout point de l'intervalle ouvert $]a, b[$ est intérieur à E. Les points a et b, éléments de E, ne sont pas intérieurs à E.

• DÉFINITIONS

D_1 *Une fonction numérique* **f** *présente un* **maximum relatif** *(au sens strict) en un point* **c** *intérieur à son ensemble de définition* E, *s'il existe un intervalle* $\mathcal{I}$ *de centre* **c**, *inclus dans* E, *tel que*, **pour tout x différent de c et appartenant à** $\mathcal{I}$ **:**

$$f(x) < f(c)$$

D_2 *Une fonction numérique* **f** *présente un minimum relatif (au sens strict) au point* **d** *si, dans les mêmes conditions* f(x) > f(d).

Ces notions sont illustrées fig. 16.

D′ *Un maximum relatif* (resp. minimum relatif) est dit *au sens large* si, dans les mêmes conditions, pour tout x appartenant à $\mathcal{I}$, $f(x) \leqslant f(c)$ [resp. $f(x) \geqslant f(d)$].

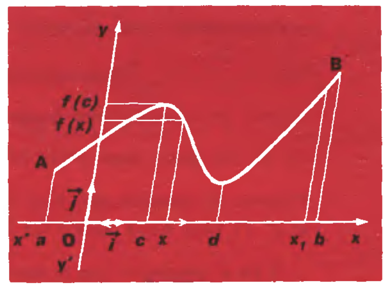


Fig. 16.

REMARQUES

❶ L'adjectif " relatif " indique que la propriété concerne des intervalles comprenant **c** (ou **d**), et non l'ensemble E tout entier. (Voir figure 16 ; $f(x_1) > f(c)$, bien que f ait un maximum relatif au point c).

❷ Dans la représentation graphique, le point **[c, f(c)]** est un **sommet,** le point **[d, f(d)]** est un **fond.**

❸ Il est important de ne pas confondre deux notions tout à fait différentes :

— **un maximum relatif** de la fonction **f** au point **c,** intérieur à l'ensemble E de définition,

— et **le plus grand élément** de l'ensemble des valeurs $f(x)$ pour $x \in$ E, c'est-à-dire de f(E).

Ces deux éléments peuvent exister simultanément et être égaux, ou différents, ou l'un exister et non l'autre...

Il en est de même d'un minimum relatif et du plus petit élément des $f(x)$.

EXEMPLES

❶ Pour la fonction f définie sur le segment $[a, b]$ par la représentation graphique donnée figure 16 : $f(c)$ est un maximum relatif,
$f(b)$ est le plus grand élément de l'ensemble $f[a, b]$].

❷ Pour la fonction mantisse : $f(x) = x - E(x)$, définie sur [0, 1], on montrera qu'il n'existe ni maximum relatif, ni plus grand élément de l'ensemble $f[0,1]$, ni minimum relatif ; cependant $f[0, 1]$ a pour plus petit élément 0.

LIMITES

● *La notion de* **limite**, *que nous abordons ici, est capitale. Dès la plus haute Antiquité, Mathématiciens et Philosophes se sont posé de nombreuses questions relatives à cette notion. Citons, par exemple, les paradoxes de Zénon (cf.* **Indications** *à la fin de cette leçon), qui illustrent avec force l'insuffisance du recours à l'intuition, dans les questions de limites.*

● *Cependant l'idée générale de cette étude apparaît aisément.*

Considérons, par exemple, l'application f *de* $\mathbb{R} - \{1\}$ *vers* $\mathbb{R}$ *telle que* $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$. *Étudier la fonction f, exige que l'on réponde à la question suivante : qu'advient-il des images* f(x) *lorsque* x *est* **« aussi voisin que l'on veut »** *de* 1*? Or pour tout* $x \neq 1$, $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$; *et pour* $x = 1$, $x + 1 = 2$. *Peut-on en conclure que* f(x) *est « aussi voisin que l'on veut » de* 2, *pourvu que* $x (\neq 1)$, *soit assez voisin de* 1*?*

Il est à remarquer que le nombre 1, *pour lequel se pose ici le problème, n'appartient pas au domaine de définition de* f. *Mais le problème de la limite éventuelle d'une fonction, lorsque la variable est arbitrairement voisine de* x_0, *est* **indépendant du fait que x_0 appartient ou non à l'ensemble de définition de la fonction.** *Ainsi pourrait être posé le même problème que précédemment — avec le même résultat ! — pour la fonction* g, *de* $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$, *telle que :*

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{pour } x \neq 1, \\ \text{et } g(1) = 10. \end{cases}$$

● *De même, si une fonction numérique est définie sur* $\mathbb{R}$ *tout entier, se pose le problème d'étudier la limite de* f *lorsque* x *est arbitrairement voisin de* $+\infty$, *ou de* $-\infty$.

8. EXEMPLES

❶ Étude de $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ pour x voisin de 1 (et $x \neq 1$).

Puisque $x \neq 1$, $f(x) = x + 1$.

Or, quel que soit le voisinage V_2 de 2 donné

$$\left(\text{par exemple l'intervalle } J = \left]2 - \frac{1}{1\,000},\ 2 + \frac{1}{1\,000}\right[\right),$$

il existe un voisinage V_1^* de 1, tel que :

tout x $(x \neq 1)$ appartenant à V_1^* a son image dans V_2.

En effet, supposons par exemple $V_2 = \mathcal{I}$.

Alors $f(x) \in \mathcal{I} \iff |f(x) - 2| < \frac{1}{1\,000}$

ou $|x + 1 - 2| < \frac{1}{1\,000}$ ou $|x - 1| < \frac{1}{1\,000}$.

C'est-à-dire : $x \in \left]1 - \frac{1}{1\,000}, 1 + \frac{1}{1\,000}\right[- \{1\}$.

Autrement dit : tout élément x ($x \neq 1$) de l'intervalle de centre 1 et de rayon $\frac{1}{1\,000}$ a son image dans l'intervalle de centre 2 et de rayon $\frac{1}{1\,000}$.

Le raisonnement ci-dessus pouvant être effectué *quel que soit le voisinage de* 2 *considéré*, on dit que 2 *est la limite de* f(x) *lorsque* x *est voisin de* 1.

On note : $$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = 2$$

2 Étude de f(x) = x^2 lorsque x est voisin de 3.

Remarquons que f est définie pour 3 et que $f(3) = 9$. Peut-on trouver un voisinage de 3 tel que son image, par f, soit incluse dans un voisinage donné de 9 ?

Soit $\left]9 - \frac{1}{1\,000}, 9 + \frac{1}{1\,000}\right[$ le voisinage choisi.

Posons $x = 3 + h$. Est-il possible de déterminer h tel que $|f(3 + h) - 9| < \frac{1}{1\,000}$?

Or $f(3 + h) = 9 + 6h + h^2$.

Par suite $|6h + h^2| < \frac{1}{1\,000}$.

— Si $h > 0$ (on dit que « x est voisin de 3 par valeurs supérieures ») et $h < 1$, alors $h^2 < h$. Donc $6h + h^2 < 6h + h$.

Par suite $|6h + h^2| < 7h < \frac{1}{1\,000}$.

Ce qui signifie : tout élément x de l'intervalle $\left]3, 3 + \frac{1}{7\,000}\right[$ a son image dans $\left]9 - \frac{1}{1\,000}, 9 + \frac{1}{1\,000}\right[$.

Ce raisonnement pouvant être repris, pour tout autre réel ε que $\frac{1}{1\,000}$, on dit que **9 est la limite de f [ou de f(x)] lorsque x est, par valeurs supérieures, voisin de 3.**

On note : $$\lim_{x \to 3^+} x^2 = 9$$

— Si $h < 0$ (on dit que x est voisin de 3 par valeurs inférieures), alors $|h^2 + 6h| = |h| . |h + 6|$ et $|h| . |h + 6| < 6|h| < \frac{1}{1\ 000}$.

Par suite, tout élément x de l'intervalle $\left]3, 3 - \frac{1}{6\ 000}\right[$ a son image dans l'intervalle $\left]9 - \frac{1}{1\ 000}, 9 + \frac{1}{1\ 000}\right[$.

Ce raisonnement pouvant être repris pour tout réel ε autre que $\frac{1}{1\ 000}$, on dit que 9 **est la limite de f lorsque x est, par valeurs inférieures, voisin de 3.**

On note $\lim\limits_{x \to 3^-} x^2 = 9$

— Puisque $\lim\limits_{x \to 3^-} x^2 = \lim\limits_{x \to 3^+} x^2 = 9$, on note $\lim\limits_{x \to 3} x^2 = 9$

9. DÉFINITIONS

• Voisinage pointé.

Puisque la valeur x_0 pour laquelle est étudiée la limite, éventuelle, d'une fonction f, peut appartenir ou ne pas appartenir à l'ensemble de définition de f, nous aurons à considérer les voisinages de x_0, **cette valeur x_0 étant exclue.**

Ceci conduit à poser la **définition suivante :**

On appelle **voisinage pointé de x_0, tout voisinage de x_0 dont x_0 est exclu.**

Nous noterons $V^*_{x_0} = V_{x_0} - \{x_0\}$, tout voisinage pointé de x_0.

• Point adhérent ; limite.

Dans les exemples ci-dessus, étant choisi un voisinage de 2 (*resp.* 9), il existait un voisinage pointé de 1 (*resp.* 3) tel que : tout élément du voisinage pointé avait son image, par f, dans le voisinage initialement choisi.

Il est donc nécessaire que *tout voisinage de la valeur* x_0 *ait une intersection non vide avec l'ensemble* $\mathfrak{D}$ *de définition de la fonction* f. On dit que tout voisinage de x_0 *rencontre* $\mathfrak{D}$ ou que x_0 est *un point adhérent* à $\mathfrak{D}$.

Ceci conduit aux définitions suivantes :

D₁ Soit f une application de $\mathfrak{D}(\subset \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ et x_0 un nombre réel. Si **tout** *voisinage* V_{x_0} de x_0, *dans* $\mathbb{R}$, *rencontre* $\mathfrak{D}$, on dit que x_0 est un « point » **adhérent à $\mathfrak{D}$.**

D₂ *Si f est une application de $\mathcal{D}(\subset \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ et x_0 un point adhérent à $\mathcal{D}$,* on dit que *f* **a pour limite *l* lorsque x est voisin de x_0 si tout voisinage de *l* contient l'image, par f, d'un voisinage pointé de x_0.**

Autrement dit : $\forall V_l \quad \exists V_{x_0} \quad$ tel que $\quad f(V^*_{x_0}) \subset V_l$.

On note : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x_0} f(x) = l$

ce qui se lit « *pour* x *voisin de* x_0, *la limite de* f(x) (*ou de* f) *est* *l* ».

CONTINUITÉ

L'un des exemples étudiés ci-dessus conduit à l'importante observation suivante : « $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ *est aussi voisin que l'on veut de* 2 » *dès que* « x *est suffisamment voisin de* 1 ». *Alors la fonction* φ *telle que* $\begin{cases} \varphi(x) = f(x) & \text{si } x \neq 1, \\ \varphi(1) = 2, \end{cases}$ *possède une propriété de plus que les fonctions* f *et* g (*la fonction* g *est telle que* $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ *si* $x \neq 1$ *et* $g(1) = 10$). *Comparée à la fonction* f *elle est, comme* g, *définie pour* $x = 1$. *Comparée à la fonction* g, *elle prend, pour* $x = 1$, *la* « *bonne valeur* », *à savoir* 2. *On dira que* φ **est continue pour la valeur** (*on dit aussi* « **au point** ») 1.

L'importance des fonctions continues est fondamentale en mathématiques.

Le rôle joué, en Physique, par ces fonctions est aussi très grand. En effet, par la nature même des résultats expérimentaux, les nombres réels x_0 *et* $f(x_0)$ *ne sont pas connus exactement mais, chacun, par un encadrement. Alors le phénomène physique,* « *traduit* » *par la fonction* f, *sera continu pour la valeur* x_0 *si la connaissance de plus en plus précise de* $f(x_0)$ *résulte de la mesure de plus en plus précise de* x_0.

10. CONTINUITÉ EN UN POINT

• DÉFINITION

Une fonction numérique f (application d'un sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$) **est dite continue au « point »** x_0 (ou pour la valeur x_0) **si :**



(1)
- ❶ $x_0 \in \mathcal{D}$;
- ❷ **pour x voisin de x_0, la limite de f(x) existe et, de plus, est égale à $f(x_0)$.**

REMARQUE

Si *f* est continue pour toutes les valeurs d'un intervalle]*a*, *b*[, la fonction est dite **continue dans cet intervalle.**

11. FONCTIONS DISCONTINUES EN UN POINT

• DÉFINITIONS

— Par négation de l'assertion (1) (cf. § 10),
une fonction f **n'est pas continue** au point x_0 si :

— $f(x_0)$ n'existe pas
ou — si la condition 2° n'est pas satisfaite.

— Si $f(x_0)$ existe et si la fonction f n'est pas continue pour la valeur x_0, on dit que la fonction est **discontinue au point** x_0.



EXEMPLES

Étudions, sur des exemples, les divers cas pouvant se présenter.

1 Fonction non définie pour la valeur x_0 considérée.

L'application f, de $\mathbb{R} - \{1\}$ vers $\mathbb{R}$, telle que $f(x) = \dfrac{3}{x-1}$ n'est pas continue au point $x = 1$ puisque $f(1)$ n'est pas définie.

2 La fonction n'a pas de limite pour la valeur x_0 considérée.

Divers cas peuvent se présenter.

a) **Les limites à droite et à gauche existent, mais sont différentes.**

— C'est le cas de la fonction « partie entière ». Pour chaque entier relatif n, il existe une limite à droite (égale à n) et une limite à gauche [égale à $(n - 1)$]. Donc il y a discontinuité pour toute valeur entière de x.

— C'est aussi le cas de l'application g, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, telle que :

$$g(1) \text{ est définie et } g(x) = \frac{3}{x-1} \text{ si } x \neq 1.$$

$$\text{Alors } \lim_{x \to 1^+} g(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \to 1^-} g(x) = -\infty.$$

b) **Il n'existe ni limite à droite, ni limite à gauche.**

Soit f l'application, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, telle que $f(x) = x$ si x est rationnel et $f(x) = 1$ si x est irrationnel. Cette fonction est discontinue sauf pour la valeur 1.

3 La limite existe pour x_0, mais elle est différente de $f(x_0)$.

Reprenons l'exemple de l'introduction (p. 171). Soit g l'application, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $g(1) = 10$ et $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ si $x \neq 1$. Alors $\lim_{x \to 1} g(x) = 2$ (Cf. § 8) et $\lim_{x \to 1} g(x) \neq g(1)$. La fonction g est discontinue au « point » 1.

FONCTION RÉCIPROQUE D'UNE FONCTION CONTINUE ET STRICTEMENT MONOTONE SUR UN SEGMENT



12. PROPRIÉTÉ DES FONCTIONS NUMÉRIQUES CONTINUES SUR UN SEGMENT

• THÉORÈME FONDAMENTAL

Si f est une fonction numérique continue sur le segment [a, b], alors l'image, par f, de ce segment est un segment [m, M].

Nous admettrons ce théorème.

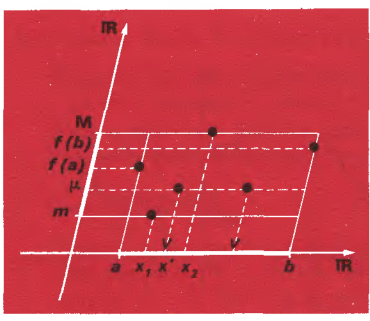
Précisons cependant ce qu'il signifie (illustration fig. 17).

Si f est continue sur le segment [a, b], alors :

① *L'ensemble des valeurs*, soit $\{f(x)\,;\, x \in [a, b]\}$, *a un plus petit élément* (soit m) *et un plus grand élément* (soit M), ce qui implique l'existence de $x_1 \in [a, b]$ et de $x_2 \in [a, b]$ tels que $f(x_1) = m$ et $f(x_2) = M$.

② *Toute valeur* μ « *comprise entre* m *et* M » *est atteinte*, c'est dire qu'il existe au moins une valeur $x' \in [a, b]$, telle que $f(x') = \mu$.

(Ce résultat s'appelle *propriété de la valeur intermédiaire*.)



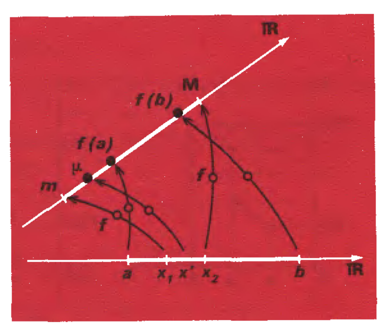


Fig. 17.

13. PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS CONTINUES ET STRICTEMENT MONOTONES



• THÉORÈME FONDAMENTAL

Si la fonction numérique f est continue et strictement monotone sur le segment [a, b], alors f est une bijection de [a, b] sur le segment [f(a), f(b)].

Supposons, par exemple, f *strictement croissante*.

❶ Alors $\forall x \in [a, b]$, $a \leqslant x \leqslant b$ implique $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$.

Ce qui prouve que l'image, par f, du segment $[a, b]$ est le segment $[f(a), f(b)]$. Le théorème fondamental (paragraphe précédent), nous assure que f *est une surjection de* [a, b] *sur* [f(a), f(b)].

❷ *Démontrons que f est une injection.*

Soit $x_1 \in [a, b]$ et $x_2 \in [a, b]$. Supposons $x_1 \neq x_2$. Alors $x_1 < x_2$ ou $x_2 < x_1$.

Puisque f *est strictement croissante* :

$$\begin{cases} \text{si } x_1 < x_2, & a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b \quad \text{implique} \quad f(x_1) < f(x_2) \\ \text{si } x_2 < x_1, & a \leqslant x_2 < x_1 \leqslant b \quad \text{implique} \quad f(x_2) < f(x_1). \end{cases}$$

Dans tous les cas : $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

En conclusion, f est une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$.

• Exemples et contre-exemples.

Montrons, sur des exemples, que les hypothèses du théorème fondamental sont *indispensables* pour pouvoir conclure.

❶ **Si la fonction f n'est pas continue sur le segment [a, b],** elle peut n'être pas surjective : la figure 18 illustre cette situation en représentant graphiquement une fonction f discontinue pour la seule valeur c de $[a, b]$, mais cependant strictement monotone (croissante) sur $[a, c[$ et $]c, b]$.

❷ **Si la fonction f n'est pas monotone sur [a, b],** bien que continue, elle peut n'être pas injective (fig. 19).

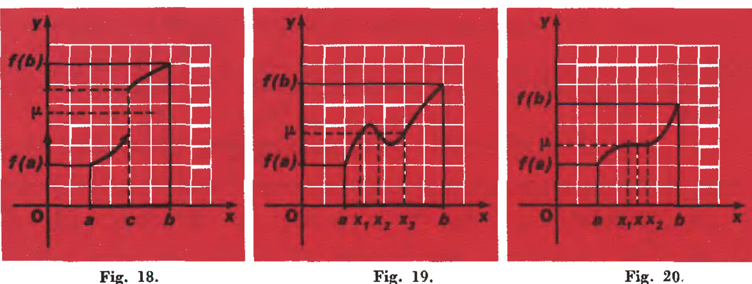


Fig. 18. Fig. 19. Fig. 20.

❸ **Si la fonction f est continue sur [a, b] et monotone non strictement,** elle peut n'être pas injective. Ainsi (fig. 20), la fonction f est constante sur le segment $[x_1, x_2] \subset [a, b]$. Alors la section réciproque $\overset{-1}{f}(\mu)$ est le segment $[x_1, x_2]$.

❹ Remarquons que les hypothèses du théorème fondamental, **suffisantes** pour que f soit une bijection, **ne sont pas nécessaires.**

Ainsi (fig. 21), la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ f(x) = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{7}{2} & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 3 \\ f(x) = \dfrac{x}{2} + 1 & \text{si } 3 < x \leqslant 4 \end{cases}$$

est une **bijection** du segment [1, 4] sur [1, 3] = [f(1), f(4)].

Cependant f n'est ni continue, ni monotone sur le segment [1, 4].

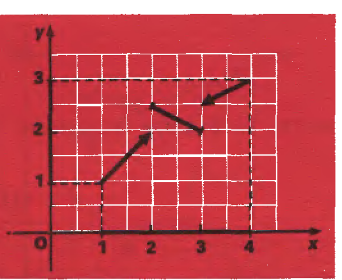


Fig. 21.

14. FONCTION RÉCIPROQUE

• THÉORÈME

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un segment [a, b], alors il existe une fonction réciproque de f. Cette fonction réciproque est une bijection du segment [f(a), f(b)] sur [a, b].

Ce théorème n'est qu'un cas particulier d'un théorème déjà démontré (cf. 5e leçon, § 6).

Compte tenu de l'importance de ce théorème, nous donnons à nouveau, sur ce cas particulier, la démonstration.

❶ Existence de la fonction réciproque.

Puisque f est une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$, quel que soit $y \in [f(a), f(b)]$, il existe x **unique,** du segment $[a, b]$, tel que $f(x) = y$.

Il existe donc une application du segment $[f(a), f(b)]$ vers $[a, b]$. Cette application est la **fonction réciproque** de f, notée f^{-1}.

❷ f^{-1} est surjective.

Posons, pour simplifier l'écriture, $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$.
Quel que soit $x \in [a, b]$, $f(x) = y$ existe et $y \in [\alpha, \beta]$.
Donc : $\forall x \in [a, b], \exists y \in [\alpha, \beta]$ tel que $x = f^{-1}(y)$.
La fonction f^{-1} est surjective.

3 f^{-1} est injective.

En effet $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) \Longleftrightarrow (x_1 = x_2) \Longrightarrow [f(x_1) = f(x_2)] \Longrightarrow (y_1 = y_2)$.

La fonction f^{-1}, *réciproque de* f, *est donc une bijection du segment* $[\alpha, \beta]$ *sur* $[a, b]$.

Si l'on pose $\varphi = f^{-1}$, on écrit de façon équivalente :

$$\varphi(y) = x \Longleftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ x \in [a, b] \end{cases}$$

ou, en revenant à la notation usuelle :

$$y = \varphi(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = f(y) \\ y \in [a, b] \end{cases}$$

● **Propriétés de la fonction réciproque $\varphi = f^{-1}$.**

P1 $$f \circ \varphi = \mathbf{1}_{[\alpha, \beta]} \quad (1) \qquad \text{et} \qquad \varphi \circ f = \mathbf{1}_{[a, b]} \quad (2)$$

Soit à démontrer, par exemple, la relation (1) :

$$\forall x \in [\alpha, \beta] \quad \varphi(x) = y \Longleftrightarrow x = f(y).$$

par suite : $\forall x \in [\alpha, \beta]$, $(f \circ \varphi)(x) = f(y) = x$. Donc $f \circ \varphi = \mathbf{1}[\alpha, \beta]$.

P2 La fonction réciproque d'une fonction f continue et strictement monotone sur un segment est monotone et varie dans le même sens que f.

Soit φ la fonction réciproque de la fonction f continue et strictement monotone sur le segment $[a, b]$.

Posons $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$.

Soit $(x_1, x_2) \in [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta]$,

alors $[y_1 = \varphi(x_1)$ et $y_2 = \varphi(x_2)]$ équivaut à $x_1 = f(y_1)$ et $x_2 = f(y_2)$:

- si f est strictement croissante, $x_1 < x_2$, c'est-à-dire $f(y_1) < f(y_2)$ implique $y_1 < y_2$ donc φ est croissante.
- si f est décroissante, $x_1 < x_2$, c'est-à-dire $f(y_1) < f(y_2)$ implique $y_1 > y_2$ donc φ est décroissante.

P3 La fonction f^{-1}, réciproque de f, est continue sur $[f(a), f(b)]$.

Conformément au programme cette propriété est admise.

• **Représentation graphique cartésienne de f^{-1}.**

❶ Soit (C) la représentation graphique cartésienne de f sur $[a, b]$, dans le repère $(\vec{O}; \vec{i}, \vec{j})$ (fig. 22). Alors (C) est aussi la représentation cartésienne de f^{-1} sur $[\alpha, \beta]$, *dans le repère* $(\vec{O}; \vec{j}, \vec{i})$.

En effet, dans $(\vec{O}; \vec{i}, \vec{j})$, (C) est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $y = f(x)$; par suite dans $(\vec{O}; \vec{j}, \vec{i})$, c'est l'ensemble des points $M(y, x)$ avec $x = f^{-1}(y)$.

❷ Il est d'usage, *en choisissant le repère* $(O; \vec{i}, \vec{j})$ *orthonormé*, de revenir à la disposition usuelle en appelant x *l'élément générique de l'ensemble de départ.*

Par suite, si (C) est la représentation graphique cartésienne de f avec $y = f(x)$ et (Γ) celle de $y = \varphi(x)$, alors (C) et (Γ) *sont symétriques par rapport à la bissectrice de* $(\vec{i}, \vec{j})$.

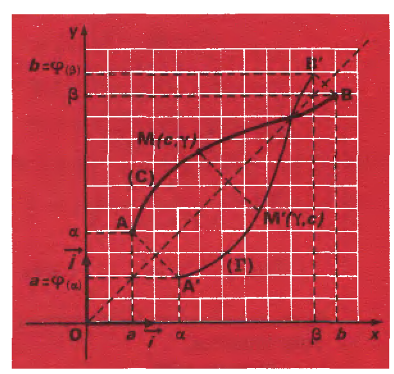


Fig. 22.

En effet, $\forall M(c, \gamma) \in (C)$, $\gamma = f(c)$. Ce qui équivaut à $c = \varphi(\gamma)$, donc $M'(\gamma, c) \in (\Gamma)$. Or $M(c, \gamma)$ et $M'(\gamma, c)$ **sont symétriques par rapport à la bissectrice de** $(\vec{i}, \vec{j})$ (fig. 22).

15. EXTENSION DE LA DÉFINITION DE LA FONCTION RÉCIPROQUE

• Tout ce qui précède est relatif aux fonctions réciproques des fonctions continues et strictement monotones sur un segment. Or, en pratique, on est souvent amené à considérer des fonctions numériques continues et strictement monotones sur une section finissante $[a, +\infty[$, ou une section commençante $]-\infty, b]$, ou sur $\mathbb{R}$ entier.

• Nous admettrons alors les deux résultats suivants :

P'_1 *Si f est continue et strictement croissante sur* $[a, +\infty[$ et si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, *alors il existe une fonction réciproque de* f, *qui est une bijection continue strictement croissante de* $[f(a), +\infty[$ *sur* $[a, +\infty[$.

P'_2 *Si* f *est continue et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$, *si* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ *et* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, *alors il existe une fonction réciproque de* f, *qui est une bijection continue strictement croissante de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}$.



EXERCICES

13-1 **Préciser les « ensembles de définition » des fonctions numériques f telles que :**

(1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 1}{x - 2}$.

(2) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

(3) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - |x|}{2 - |x|}}$.

(4) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 6x + 9}$.

(5) $f(x) = \dfrac{x + 3}{\sqrt{x^2 - 5x + 4}}$.

(6) $(fx) = \dfrac{x^2 + 3}{x^2 + |x|}$.

(7) $f(x) = \sqrt{1 - |x|}$.

(8) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2 + 6x + 9}}$.

13-2 Rechercher parmi les fonctions précédentes celles qui sont paires; celles qui sont impaires.

13-3 **En distinguant éventuellement plusieurs cas, exprimer sans employer le symbole « valeur absolue », | |, les relations suivantes entre x et y et représenter graphiquement les fonctions f telles que f(x) = y.**

(1) $y = |x|$.

(2) $y = |x^2 - x|$.

(3) $y = 2x^2 + x - |x|$.

(4) $y = \dfrac{|x|}{x}$.

(5) $y = |x + 1| - |x - 1|$.

(6) $y = |x^2 - 5x + 4| - |x^2 - 4|$.

13-4 **Quel que soit le nombre réel x, on désigne par E(x) le plus grand entier inférieur ou au plus égal à x.**

Exemples : x = 3, E(x) = 3 ; x = $\sqrt{3}$, E(x) = 1.

Exprimer, sans employer le symbole E(x), les relations suivantes entre y et x et représenter graphiquement les fonctions numériques f telles que f(x) = y.

(1) $y = E(x)$.

(2) $y = \sqrt{x - E(x)}$.

(3) $y = 1 - x + E(x) - E(x - 1)$.

(4) $y = x - E(x)$.

(5) $y = 2x - E(x)$.

(6) $y = \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2} E(2x) - \frac{1}{2} E(1 - 2x)$

13-5 Rechercher parmi les fonctions ci-dessus celles qui sont périodiques.

13-6 Etudier la fonction numérique f telle que $f(x) = \sqrt{x - E(x)}$.

13-7 Quel que soit x réel, il existe un entier relatif unique n tel que $\frac{n}{10} \leqslant x < \frac{n+1}{10}$

Soit f l'application de [0,1] vers $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{n}{10}$.

Représenter graphiquement f.

13-8 1° Définir $f \circ f$ et $f \times f$ sachant que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

2° Définir $f \circ f$ et $f \times f$ sachant que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$.

3° Définir $f \circ f$ et $f \times f$ sachant que $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

4° Définir $g \circ f$, $f \circ g$ et $f \times g$ sachant que $f(x) = x + 2$ et $g(x) = x^2$ (x réel).

5° Mêmes questions si $f(x) = \frac{1}{x}$ (avec $x \neq 0$) et $g(x) = \frac{1}{x+1}$ (avec $x \neq -1$).

13-9 **Démontrer, en revenant à la définition, que :**

(1) $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 - 2x) = 0$

(2) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 2x) = 0$

(3) $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 4x + 3) = 0$

(4) $\lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{x^2 - 1} = 0^+$

(5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 1}\right) = +\infty$

(6) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x+2}{x-1} = 3.$

13-10 Démontrer, à l'aide de la définition, que la fonction f, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, telle que $f(x) = x^2 + x + 1$ est continue pour la valeur 1.

13-11 Même question pour l'application f, de $\mathbb{R} - \{1\}$ vers $\mathbb{R}$, telle que $f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$ « au point » 3.

13-12 Etudier la continuité de la fonction f telle que $f(x) = x - \text{E}(x)$ avec $\text{E}(x) = n$ si $n \leqslant x < n + 1$ ($n \in \mathbb{Z}$). Représenter graphiquement f.

13-13 On pose $\text{E}(x) = n$ avec $n \leqslant \mathbb{Z}$ si $n \leqslant x < n + 1$.

1° Etudier la continuité de la fonction f, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que :

$$f(x) = \sqrt{x - \text{E}(x)}$$

2° Comparer $f(x+1)$ et $f(x)$.

3° Démontrer que l'application φ de [0, 1] dans $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(x) = \sqrt{x}$ est strictement croissante et que $\forall x \in [0, 1]$, $\varphi(x) \geqslant x$. Représenter graphiquement φ.

4° Représenter graphiquement f.

13-14 Mêmes questions pour $f(x) = \text{E}(x) + \sqrt{x - \text{E}(x)}$.

13-15 Soit f l'application du segment $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = 1 - x$ pour x irrationnel et $f(x) = x$ pour x rationnel.

1° Etudier la continuité de f.

2° Démontrer que $f(x)$ prend toute valeur comprise entre 0 et 1.

13-16 Soit f la fonction telle que $f(x) = 2\,E(x) - x$ si $0 \leqslant x < 3$.
(On désigne par $E(x)$ la partie entière de x).

1° Préciser $\mathbb{R}_1 = f([0, 3[)$.

2° La fonction f est-elle une bijection de $[0, 3[$ sur $\mathbb{R}_1$?

3° Dessiner la représentation graphique cartésienne de la fonction réciproque f^{-1}. Exprimer $y = f^{-1}(x)$.

13-17 Soit f la fonction, de $\mathbb{R} - \{0\}$ vers $\mathbb{R}$, telle que $f(x) = \frac{1}{x}$.

1° On pose $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$. Préciser $f(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}_1$. La fonction f est-elle une bijection de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R}_1$?

2° Préciser f^{-1}.

13-18 Soit f la fonction, de $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{4}{3}\right\}$ vers $\mathbb{R}$, telle que $f(x) = \frac{2x + 3}{3x - 4}$.

1° On pose $\mathbb{R}' = \mathbb{R} - \left\{\frac{4}{3}\right\}$. Préciser $f(\mathbb{R}') = \mathbb{R}_1$.

2° Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}'$ sur $\mathbb{R}_1$.
Etudier la fonction réciproque f^{-1}.

13-19 **Toutes les fonctions considérées dans ce problème appliquent l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels sur l'ensemble F à deux éléments 0, 1, soit $F = \{0, 1\}$.**

1° Etant donné un nombre réel a, on désigne par f_a la fonction, de $\mathbb{R}$ sur F, telle que : $f_a(x) = 0$ si $x < a$ et $f_a(x) = 1$ si $x \geqslant a$.

De même, étant donné un nombre réel b, on désigne par g_b la fonction de $\mathbb{R}$ sur F, telle que $g_b(x) = 0$ si $x > b$ et $g_b(x) = 1$ si $x \leqslant b$.

Donner une représentation graphique de f_a et g_b.

Quelle est la valeur de $u(x) = f_a(x) \cdot g_b(x)$ suivant que x appartient ou non au segment $[a, b]$?

Même question pour $v(x) = 1 - u(x)$

2° On appelle **fonction caractéristique** du segment $[a, b]$, le fonction de $\mathbb{R}$ dans F, notée $h_{a,b}$ telle que : $h_{a,b}(x) = 1$ si $a \leqslant x \leqslant b$ et $h_{c,b}(x) = 0$ si $x \notin [a, b]$
Représenter graphiquement $h_{(a,b)}$.

Soit a, b, c, d quatre nombres réels donnés. On suppose, dans cette seule question, que $a < c < b < d$.

Démontrer que, quel que soit le nombre réel x : $h_{c,b}(x) = h_{c,d}(x) \cdot h_{a,b}(x)$.

Etudier, suivant les valeurs de x, les valeurs prises par $h_{a,b}(x) + h_{c,d}(x)$.

En déduire que : $h_{a,d}(x) = h_{a,b}(x) + h_{c,d}(x) - h_{c,d}(x) \cdot h_{a,b}(x)$.

3° Les résultats obtenus à la question précédente permettent d'associer à l'intersection [c, b] et à la réunion [a, d] des deux segments [a, b] et [c, d], deux fonctions caractéristiques ne dépendant que des fonctions caractéristiques des segments [a, b] et [c, d].

Démontrer que les résultats obtenus à la question précédente sont généraux, c'est-à-dire que quelle que soit la position relative des quatre nombres réels a, b, c, d, si l'on pose : $X = [a, b]$ et $Y = [c, d]$, et $h_{X \cap Y} = 0$ pour $X \cap Y = \emptyset$

on a : $h_{X \cup Y}(x) = h_X(x) + h_Y(x) - h_X(x) \cdot h_Y(x)$

et $h_{X \cap Y}(x) = h_X(x) \cdot h_Y(x)$.

4° Désignons par les signes $\cdot$ et $*$ les opérations qui associent à h_X et h_Y respectivement $h_{X \cap Y}$ et $h_{X \cup Y}$.

Donc $h_X \cdot h_Y = h_{X \cap Y}$ et $h_X * h_Y = h_{X \cup Y}$.

Démontrer que $h_X \cdot h_X = h_X * h_X = h_X$.

Vérifier que l'opération $*$ est associative et commutative.

Démontrer que, quels que soient les segments X, Y, Z :

$$h_Z \cdot (h_X * h_Y = (h_Z \cdot h_X) * (h_Z \cdot h_Y)$$

$$h_Z * (h_Y \cdot h_Y) = (h_Z * h_X) \cdot (h_Z * h_Y).$$

Qu'en déduit-on pour les opérations $*$ et $\cdot$?

5° On désigne par X′ le complémentaire, par rapport à $\mathbb{R}$, du segment X.

Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad h_{X'}(x) = 1 - h_X(x)$.

6° On désigne par $X \Delta Y$ la différence symétrique de X et Y (Cf. 2e leçon).

A l'aide de 4° et 5°, démontrer que $h_{X \Delta Y}(x) = h_X(x) + h_Y(x) - 2\, h_X(x) \cdot h_Y(x)$.

En déduire que $h_{X \Delta Y}(x) = [h_X(x) - h_Y(x)]^2$.



INDICATIONS

• **Zénon d'Elée** (495-435 avant notre ère).

Philosophe grec, auteur de quatre célèbres paradoxes qui se ramènent tous aux deux suivants : 1° **Tout mouvement est impossible** car le « mobile » doit atteindre le milieu du trajet avant d'en atteindre l'extrémité; mais avant d'arriver au milieu, il doit être parvenu au quart et ainsi de suite... *jusqu'à l'infini*. Le mouvement ne peut donc jamais commencer.

2° **Paradoxe d'Achille et de la tortue.** Achille ne rattrapera jamais la tortue qui chemine devant lui car, au préalable, il doit atteindre la place d'où est partie la tortue; quand il y sera parvenu, la tortue aura quitté cette place et... *ainsi de suite* (paradoxe analogue : la flèche tirée en direction d'Achille ne l'atteindra jamais...).

13-1 (6) $\mathbb{R} - \{0\}$.

13-2 (2) — (3) — (6) — (7) sont paires.

13-3 La représentation graphique de (2) — (3) — (6) suppose connue celle des fonctions trinômes du second degré.

$$(5) \begin{cases} \text{si} \quad x \leqslant -1 & y = -2 \\ \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1 & y = 2x \\ \text{si} \quad x \geqslant 1 & y = 2 \end{cases} \quad \text{(cf. fig. 23)}$$

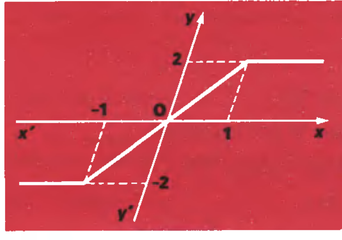


Fig. 23.

Fig. 24.

13-6 Si $n \leqslant x < n + 1$ (avec $n \in \mathbb{Z}$) : $y = \sqrt{x - n}$.
La fonction f telle que $f(x) = y$ est périodique de période 1 (cf. fig. 24).

13-8 Posons : $f \circ f = \varphi$ et $f \times f = p$.
1° Quel que soit $x \in \mathbb{R}$: $\varphi(x) = x$ et $p(x) = x^2$.
3° $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$: $\varphi(x) = x$ et $p(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

13-9 (1) Pour établir par exemple que : $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 - 2x) = 0$, il s'agit d'établir que : . . .
Donc la démonstration suit le cheminement suivant :
Soit $\varepsilon > 0$, quelconque.
Pour que : $|x^2 - 2x| < \varepsilon$ soit vérifié, il *suffit que* : $|x| \cdot |x - 2| < \varepsilon$.
Puisque $x \to 0$, bornons x par exemple à : $[-1, +1]$; c'est-à-dire $-1 < x < 1$.
Alors : $-3 < x - 2 < -1$ et $|x - 2| < 3$.
D'où : $|x| \cdot |x - 2| < 3|x|$.
Pour que : $|x^2 - 2x| < \varepsilon$ soit vérifié, il *suffit* que : $3|x| < \varepsilon$ soit vérifié, donc il *suffit* que : $|x| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Donc : $\forall \varepsilon > 0$ (et $\varepsilon < 3$), $|x| < \dfrac{\varepsilon}{3} \Longrightarrow |x^2 - 2x| < \varepsilon$.

Si $\varepsilon \geqslant 3$, alors $\forall x \in [-1, +1]$, $|x - 2| < 3$.
D'où : $|x| \cdot |x - 2| < 3 \leqslant \varepsilon$.
Dans tous les cas, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$ tel que $|x| < \alpha \Longrightarrow |x^2 - 2x| < \varepsilon$.

13-12 $\begin{cases}\text{Discontinuité pour toute valeur entière de } x.\\ \text{Continuité à droite pour toute valeur entière de } x.\end{cases}$
Représentation graphique (fig. 25).

13-14 1° Continuité en tout point.
4° Représentation graphique (fig. 26).

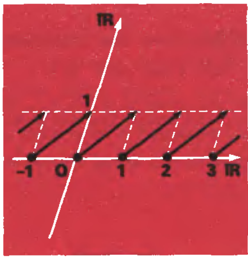


Fig. 25.

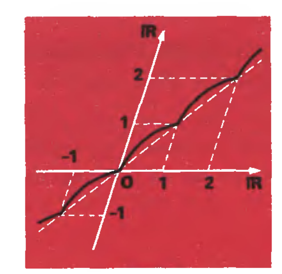


Fig. 26.

13-16 3° *Réponse* $\begin{cases} f^{-1}(x) = 2\,\mathrm{E}(1+x) - x \quad \text{si} \quad x \notin \{-1, 0, 1, 2\}\\ \text{si} \quad x = -1, \ f^{-1}(-1) = \ldots; \quad \text{si} \quad x = 0, \ \ldots \end{cases}$

13-17 $f^{-1} = f.$

13-18 $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}.$ Si $y = f^{-1}(x), \quad y = \dfrac{4x+3}{3x-2}.$

13-19 4° Par exemple : $h_Z \cdot (h_X * h_Y) = h_Z \cdot h_{X\cup Y}$

$$= h_{Z\cap(X\cup Y)} = h_{(Z\cap X)\cup(Z\cap Y)}$$
$$= h_{Z\cap X} * h_{Z\cap Y}$$
$$= (h_Z \cdot h_Z) * (h_Z \cdot h_Y)$$

6° Poser $X \,\Delta\, Y = (X \cup Y') \cap (X' \cup Y).$

Alors $h_{X\Delta Y} = h_{X\cup Y'} \cdot h_{X'\cup Y} = \ldots$

Remarquer que $\varphi_{X'}(x) = 1 - \varphi_X(x)$ et $\varphi_X(x) \cdot \varphi_{X'}(x) = 0.$

DÉRIVABILITÉ DES FONCTIONS NUMÉRIQUES



● *Les fonctions considérées dans ce chapitre sont des* **fonctions numériques** *(applications d'une partie de l'ensemble* $\mathbb{R}$ *des réels vers* $\mathbb{R}$*).*

Etant donné une telle fonction f, *définie au voisinage de* x_0, *nous nous proposons le problème d'approximation suivant : comment « approcher » localement* f, *c'est-à-dire sur un voisinage de* x_0, *par une fonction « aussi simple » que possible ?*

● *Précisons à l'aide d'un exemple.*

Considérons un automobiliste parti de Paris à 10 h, passé à Etampes à 11 h, arrivé à Orléans à midi ; et supposons que les distances Paris-Etampes et Etampes-Orléans soient respectivement, 45 et 75 km. Du fait que cet automobiliste a parcouru 75 km entre 11 h et 12 h, on ne peut pas conclure qu'entre 11 h et 11 h 20 mn il a parcouru 25 km ou que, pendant chaque minute qui suit 11 h, il parcourt $\frac{75}{60} = 1{,}250$ *km. Plus généralement, soit* **t** *un temps, ici compris entre 10 h et 12 h ; il est intéressant d'***approcher** $\mathbf{f(t) - f(11)}$ **par une fonction linéaire de** $\mathbf{(t - 11)}$, *c'est-à-dire, en posant* $h = t - 11$, *d'écrire :* $f(11 + h) = 45 + \lambda h$, λ **étant un coefficient qu'il s'agit de choisir au mieux.**

Puisque $\dfrac{f(11 + h) - 45}{h} = \lambda$, *cela conduit à étudier la fonction* φ *qui, au réel* **h**, $(\neq 0)$, *fait correspondre le réel* $\varphi(h) = \dfrac{f(11 + h) - 45}{h}$. *La fonction* φ *n'est pas définie pour* $h = 0$, *mais elle l'est sur les voisinages pointés de zéro. D'où l'idée de rechercher si* $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h)$ **existe.**

S'il existe une telle limite **finie** A, *le nombre* A *est appelé* **nombre dérivé** *de* f *pour* $t = 11$. *On dit aussi que* f **est dérivable** *pour* $t = 11$.

De la définition de A, *il résulte que, pour tout* h :

$$f(11 + h) = 45 + h[A + \varepsilon] \quad \textit{avec} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon = 0.$$

● *L'exemple précédent, qui pourrait être remplacé par de nombreux autres (débit d'un fleuve, intensité d'un courant électrique, ...) nous conduit, pour une fonction* f *définie sur des voisinages de* x_0, *à étudier, s'il existe, le* **nombre dérivé pour la valeur** x_0. *Une illustration en sera donnée par la notion de* **tangente à une courbe plane en un point.**

Parmi les fonctions de $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$, *définies sur des voisinages de* x_0, *nous étudierons* **le sous-ensemble des fonctions ayant un nombre dérivé au point** x_0 ; *ces fonctions sont dites* **dérivables** *(ou* **différentiables***) au point* x_0.

● *Cette étude locale (au point* x_0*) étant effectuée pour une fonction* f, *nous etudierons l'ensemble des réels* **x** *en lesquels la fonction admet un nombre dérivé. Cet ensemble étant défini, nous serons conduits à étudier la fonction, appelée* **fonction dérivée première de f,** *qui applique cet ensemble sur celui des nombres dérivés.*

NOMBRE DÉRIVÉ

1. DÉRIVABILITÉ EN UN POINT



● DÉFINITIONS

D₁ *Une fonction numérique* f, *définie sur un voisinage de* x_0 *est dite* **dérivable** (ou **différentiable**) **au point** x_0, *s'il existe* :

— *un voisinage* $\mathcal{V}_{(x_0)}$ de x_0,

— *un réel* A,

— et *une fonction* η,

tels que, **pour tout x appartenant à** $\mathcal{V}_{(x_0)}$:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \,.\, [A + \eta(x)] \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \eta(x) = 0$$

Ce qui se note également, en posant $x = x_0 + h$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \,.\, [A + \varepsilon(h)] \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0 \quad \text{(fig. 1)}$$

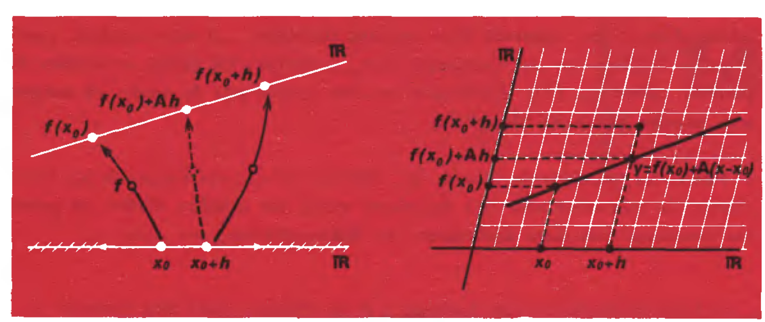


Fig. 1.

D₂ La fonction linéaire — notée df_{x_0} — qui à h réel fait correspondre $A \cdot h$ est l'**application différentielle de f au point x_0.**

Par suite :

$$df_{x_0}(h) = A \cdot h \quad \text{(fig. 2)}$$

Notons que, pour cette fonction linéaire, la variable (dite variable indépendante) est h, alors que x_0 est un nombre fixé.

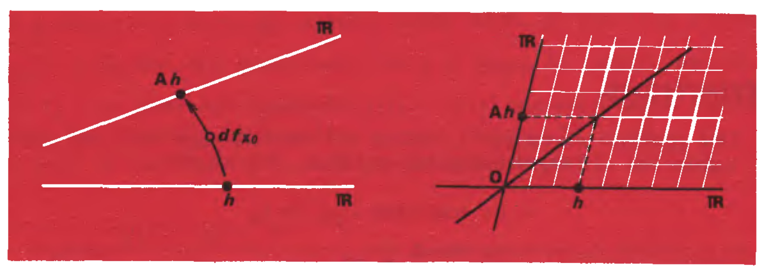


Fig. 2.

REMARQUE

Si l'on note les accroissements $x - x_0 = \Delta x$ et $y - y_0 = \Delta y$, on représente fréquemment le réel $df_{x_0}(\Delta x) = A . \Delta x$ par le symbole dy qu'on appelle **différentielle** de f au point x_0 :

$$dy = A \cdot \Delta x$$

La différentielle dy au point x_0 est donc **l'image de Δx par l'application différentielle (au point x_0).**



• THÉORÈME

Une fonction numérique f, définie sur un voisinage de x_0, est dérivable au point x_0 si, et seulement si, la fonction φ telle que :

$\varphi(h) = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ **a une limite finie pour h tendant vers zéro.**

— **Supposons f dérivable au point x_0.**

Alors $f(x_0 + h) = f(x_0) + h\,[A + \varepsilon(h)]$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Donc $\varphi(h) = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = A + \varepsilon(h)$.

Et $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = A$.

— **Réciproquement,** soit $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = A$.

Posons $\varepsilon(h) = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - A$.

Alors $\begin{cases} \lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0. \\ \text{et } f(x_0 + h) = f(x_0) + h \,.\, [A + \varepsilon(h)]. \end{cases}$

Donc f est dérivable au point x_0.

2. NOMBRE DÉRIVÉ D'UNE FONCTION EN UN POINT

L'étude précédente montre l'intérêt de la limite, si elle existe et est finie, du rapport $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ pour h arbitrairement voisin de zéro.

D'où la définition :

D_3 La limite, si elle existe et si elle est finie, du rapport $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ pour x voisin de x_0, est le nombre dérivé de la fonction f, au point x_0.

La fonction f est dite, **dérivable au point x_0,** si elle admet un nombre dérivé au point x_0.

3. EXEMPLES

1 La fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, telle que $f(x) = 2x^2$ est-elle dérivable au point $x_0 = 1$?

Pour $x_0 = 1$, $f(1) = 2$ et $f(1+h) = 2(1+h)^2 = 2 + h\,(4 + 2h)$.

Par suite $f(1+h) = f(1) + h\,[4 + \varepsilon(h)]$ avec $\varepsilon(h) = 2\,h$.

Puisque $\lim\limits_{h \to 0} 2h = 0$, **la fonction f est dérivable au point 1** et son nombre dérivé, pour cette valeur, est **4.**

L'application différentielle df_1 est telle que $df_1(h) = 4h$.
Remarquons que l'étude ci-dessus pourrait être effectuée **quel que soit x_0.**
La fonction f est donc dérivable, quel que soit x_0.

2 La fonction f de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}$, telle que $f(x) = \frac{3}{x}$ est-elle dérivable au point $x_0 = 2$?

Pour $x_0 = 2$, $f(2) = \frac{3}{2}$ et $f(2+h) = \frac{3}{2+h}$.

Par suite $f(2+h) - f(2) = \frac{3}{2+h} - \frac{3}{2} = \frac{-3h}{2(2+h)}$.

C'est-à-dire $\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{-3h}{2(2+h)}$.

Or, $\lim\limits_{h \to 0} - \frac{3}{2(2+h)} = -\frac{3}{4}$; **la fonction f est donc dérivable au point $x_0 = 2$,** et le nombre dérivé, pour cette valeur, est $A = -\frac{3}{4}$.

L'application différentielle df_2 est telle que : $df_2\,(h) = -\frac{3}{4}\,h$.
On démontrerait de même que la fonction f est dérivable en tout point $x \neq 0$.

4. CONTRE-EXEMPLES

Montrons, sur quelques exemples, des cas de non dérivabilité. D'après le théorème démontré ci-dessus (§ 1), ces cas seront essentiellement, de trois types :

pour h arbitrairement voisin de zéro, $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ n'a pas de limite,

ou a une limite infinie,

ou a une limite à droite et une limite à gauche distinctes.

1 La fonction f, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = 0$ et $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$, est-elle dérivable au point $x_0 = 0$?

Au point $x_0 = 0$, $\dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \sin\dfrac{1}{h}$. Puisque $\sin\dfrac{1}{h}$ prend toutes les valeurs du segment $[-1, +1]$ lorsque h tend vers zéro, **la fonction f n'est pas dérivable pour $x_0 = 0$.**

2 La fonction f, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, telle que $f(x) = \sqrt[3]{x}$ est-elle dérivable au point $x_0 = 0$?

Pour $x_0 = 0$, $f(0) = 0$ et $f(h) = \sqrt[3]{h}$; $\dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{h^2}}$; or, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$.

La fonction f n'est donc pas dérivable au point $x_0 = 0$.

3 La fonction f, qui à $x \geqslant 1$, fait correspondre :

$f(x) = -x + \sqrt{(x-2)^2 (x-1)}$ est-elle dérivable pour $x_0 = 2$?

Remarquons que $f(x) = -x + |x - 2| \sqrt{x - 1}$

Alors $f(2) = -2$ et $f(2 + h) - f(2) = -h + |h| \sqrt{1 + h}$

$$= h\left[-1 + \frac{|h|}{h} \sqrt{1 + h}\right]$$

Or
$$-1 + \frac{|h|}{h}\sqrt{1 + h} = \begin{cases} -1 + \sqrt{1 + h} & \text{pour } h > 0. \\ -1 - \sqrt{1 + h} & \text{pour } h < 0. \end{cases}$$

Par suite
$$\begin{cases} \lim\limits_{h \to 0^+} \left(-1 + \dfrac{|h|}{h}\sqrt{1 + h}\right) = 0. \\ \lim\limits_{h \to 0^-} \left(-1 + \dfrac{|h|}{h}\sqrt{1 + h}\right) = -2. \end{cases}$$

La fonction f n'est donc pas dérivable au point $x_0 = 2$.

5. PROPRIÉTÉ DES FONCTIONS DÉRIVABLES EN UN POINT



• THÉORÈME

Si une fonction f est dérivable au point x_0, alors elle est continue au point x_0.

En effet, par définition de la dérivabilité au point x_0 :

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h\,[A + \varepsilon(h)] \qquad \text{avec} \qquad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Puisque A est un nombre fini, $\lim_{h \to 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = 0$; ce qui est la définition de la continuité de f au point x_0 (13e leçon, § 10).

REMARQUE

La réciproque de ce théorème est inexacte.

Considérons la fonction f, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = 0$ et, pour $x \neq 0$, $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$. Puisque $\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leqslant 1$ alors $|f(x)| \leqslant x$.

Donc **f(x) est continue pour la valeur zéro.** Nous venons d'établir (§ 4) qu'elle **n'est pas** différentiable en ce point.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES NOMBRES DÉRIVÉS ET DES DIFFÉRENTIELLES

6. INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES NOMBRES DÉRIVÉS

Soit f une fonction numérique, définie au point x_0 et dans un voisinage, et admettant pour graphe cartésien dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ une courbe (Γ).

• Supposons f dérivable pour la valeur x_0.

Alors $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = A.$

Or $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ est le coefficient directeur de la sécante M_0M à (Γ) (fig. 3 et 4), si l'on désigne par M_0 et M les points $M_0[x_0, f(x_0)]$ et $M[x_0 + h, f(x_0 + h)]$.

Pour M arbitrairement voisin de M_0 sur (Γ), donc pour h arbitrairement voisin de zéro, ce coefficient directeur a une limite A.

La courbe (Γ) *admet donc une tangente* M_0T *au point* M_0 *et cette tangente a pour coefficient directeur le nombre dérivé* A *au point* x_0.

L'équation de la tangente au point M_0 est donc :

$$y = f(x_0) + A(x - x_0)$$

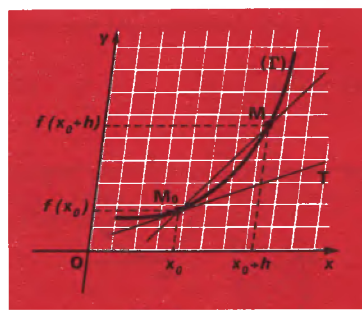


Fig. 3.

Fig. 4.

● **Supposons que la courbe (Γ) admette au point M_0 une tangente M_0T.**

❶ Si la tangente M_0T n'est pas parallèle à O*y* (fig. 3), son coefficient directeur A est la limite du coefficient directeur *m* de la sécante M_0M pour M arbitrairement voisin de M_0 sur (Γ) ; or $m = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Par suite $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$.

Donc f *est dérivable au point* x_0, *et le nombre dérivé est égal à* A, *coefficient directeur de la tangente.*

❷ Si la tangente M_0T est parallèle à O*y* (fig. 4), alors $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$.

Donc f *n'est pas dérivable au point* x_0.

REMARQUE

Nous avons donné (§ 4) comme exemple de **non-dérivabilité** pour la valeur x_0, celui où les limites à droite et à gauche de $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ **existent** mais sont **différentes.** Dans ce cas, nous dirons que *f* est *dérivable à droite* et *à gauche* de x_0 et que la courbe (Γ) d'équation cartésienne $y = f(x)$ admet, au point M_0, de coordonnées $[x_0, f(x_0)]$:

une **demi-tangente à droite** (de coefficient directeur $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$)

et une **demi-tangente à gauche** (de coefficient directeur $\lim\limits_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$).

— Ainsi, par exemple (fig. 5), si $f(x) = |x^2 - 1|$ nous obtenons au point 1 :

$$f(1) = 0 \qquad f(1 + h) = |h^2 + 2h|$$

puis $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{|h^2 + 2h|}{h} = 2$ et $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{|h^2 + 2h|}{h} = -2.$

— De même, nous avons illustré (fig. 6) le résultat obtenu au § 4 (3°).

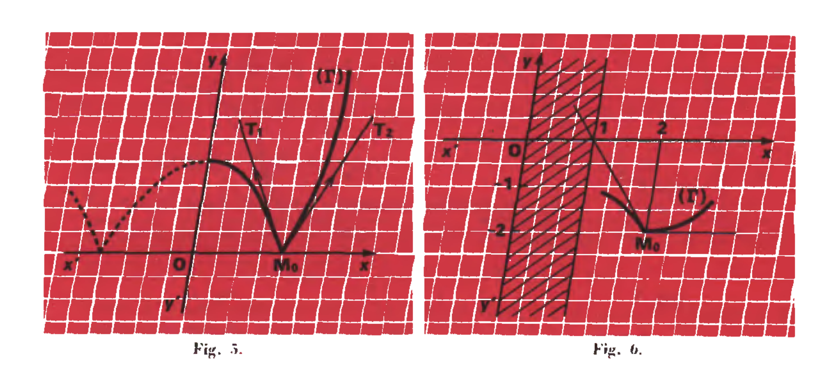


Fig. 5. Fig. 6.

7. INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES DIFFÉRENTIELLES

● Soit :
- une fonction f différentiable au point x_0,
- le nombre dérivé A au point x_0,
- le graphe cartésien (Γ) de f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$,
- M_0 le point $[x_0, y_0 = f(x_0)]$,
- M_0T la tangente en M_0, d'équation $y = f(x_0) + A\,(x - x_0)$.

Soit h un nombre réel quelconque et, sur (Γ), le point M de coordonnées $x = x_0 + h$ et $y = f(x_0 + h)$.

Sur M_0T, soit le point P de coordonnées $x_0 + h$ et $f(x_0) + A\,(x - x_0)$, (fig. 7).

Si K est le point de coordonnées $[x_0 + h, f(x_0)]$, il en résulte :

$$\overline{KP} = f(x_0) + A\,(x - x_0) - f(x_0) = A\,(x - x_0).$$

Donc $$\overline{KP} = A(x - x_0) = df_{x_0}(h)$$

Par suite :
$df_{x_0}(h) = A.h$ *représente l'accroissement de l'ordonnée du point* P *sur la tangente, pour un accroissement* h *de l'abscisse.*

C'est pourquoi l'application linéaire df_{x_0}, par laquelle l'image de h est $df_{x_0}(h) = A.h$, s'appelle *application linéaire tangente.*

En reprenant les notations du § 1 :

$$\Delta y = y - y_0 = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \quad \text{et} \quad dy = df_{x_0}(\Delta x) = A \cdot \Delta x$$

Rappelons que : d'une part, Δx est la variable ; que, d'autre part pour Δx petit, dy réalise une approximation de Δy, ce qui répond au problème posé dans l'introduction.

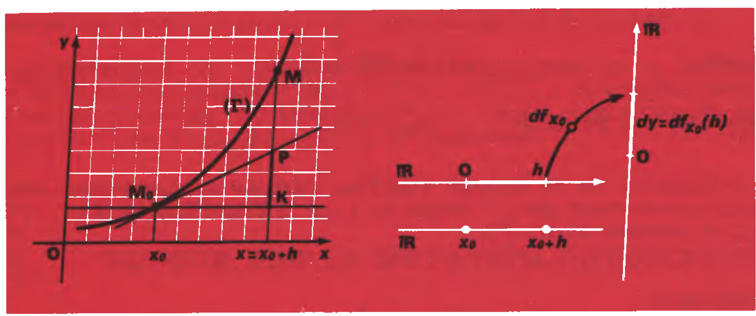


Fig. 7.

FONCTIONS DÉRIVÉES

8. FONCTION DÉRIVÉE PREMIÈRE

● Soit f une fonction numérique. Supposons f définie et dérivable en tout point x_0 d'un intervalle $]a, b[$.

Désignons par E l'intervalle $]a, b[$, par F l'ensemble des nombres dérivés aux divers points x_0, quand x_0 décrit E. D'après l'hypothèse, à chaque élément x_0 de E *correspond* un élément A_0, bien déterminé, de l'ensemble F ; le nombre dérivé au point x_0 (fig. 8).

Cette correspondance est une *application* de l'ensemble E sur l'ensemble F ;
on l'appelle **fonction dérivée première de la fonction f.**

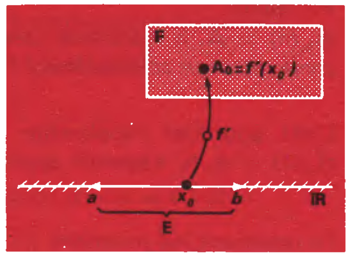


Fig. 8.

● DÉFINITION

La fonction dérivée première *d'une fonction numérique* f, *dans un intervalle*]a, b[*est, lorsqu'elle existe, la fonction qui, à chaque valeur* x_0 *de l'intervalle*]a, b[, *fait correspondre le nombre dérivé, au point* x_0, *de la fonction* f.

La fonction dérivée d'une fonction *f* est notée **f'** ce qui se lit « f *prime* ».

Par suite : $x_0(\in]a, b[) \xrightarrow{f'} A_0$

ou, pour tout x_0 de $]a, b[$, $\mathbf{A_0 = f'(x_0)}$

Plus brièvement, on dit souvent **fonction dérivée** ou simplement **dérivée.** On note usuellement par y' l'image de x par la fonction f', soit $y' = f'(x)$, et par y'_0 le nombre dérivé $f'(x_0)$.

● Remarque

Si la fonction *f* est dérivable sur l'intervalle $]a, b[$, si au point a elle admet un nombre dérivé à droite et au point b un nombre dérivé à gauche, on peut définir *la fonction dérivée de* f *sur le segment* [a, b] ; $f'(x)$ est le nombre dérivé au point x si $x \in]a, b[$; $f'(a)$ est la dérivée à droite au point a ; $f'(b)$ la dérivée à gauche au point b.



● Recherche de la dérivée première, éventuelle, d'une fonction numérique donnée.

— On précise les intervalles dans lesquels la fonction numérique *f* considérée est définie ;

— si x_0 est pris dans l'un de ces intervalles, on cherche si le rapport $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ a une limite A_0 lorsque h tend vers zéro ;

— si l'on peut exprimer la limite finie A_0 en fonction de x_0 sous la forme $\mathbf{A_0 = g(x_0)}$, *la fonction* g *est la fonction dérivée première de la fonction* f.

EXEMPLES

1. La fonction f, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, telle que $f(x) = 2x^2$ est dérivable en tout point x_0.
Le rapport $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 4x_0 + 2h$ a pour limite $4x_0$ quand h tend vers zéro.
Le nombre dérivé au point x_0 est donc $A_0 = 4x_0$.
Ceci étant valable pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, **il existe une fonction dérivée f′, définie sur $\mathbb{R}$, et telle que** $f'(x) = 4x$.

2. La fonction f, de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}$, telle que $f(x) = \dfrac{3}{x}$, admet, au point $x_0 \neq 0$ le nombre dérivé $A_0 = -\dfrac{3}{(x_0)^2}$. Ce résultat est valable pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^*$;

il existe donc une fonction dérivée f′ définie sur $\mathbb{R}^*$, et $f'(x) = -\dfrac{3}{x^2}$

- **Dérivées successives.**

Si la dérivée première f' d'une fonction f est elle-même dérivable (ou différentiable) en tout point d'un intervalle $\mathcal{I}$, sa fonction dérivée est appelée **dérivée seconde** de f, et notée f'' (ce qui se lit « f seconde »).

Plus généralement, les fonctions dérivées successives de la fonction f, si elles existent, sont notées f''' ou $f^{(3)}$, $f^{(4)}$, ... $f^{(n)}$, ... et appelées **dérivée troisième** (ou d'ordre 3), ..., **dérivée n^ième** (ou d'ordre n). Si $f^{(n)}$ existe, on dit que la fonction f est n fois dérivable (ou différentiable).

9. RETOUR SUR LA NOTATION DIFFÉRENTIELLE

- La différentielle de la fonction f, au point x_0, est l'image de h par l'application différentielle df_{x_0} telle que, si A_0 est le nombre dérivé au point x_0, alors $df_{x_0}(h) = A_0 . h$ (§ 1). Or A_0 est le nombre dérivé de f au point x_0, soit $f'(x_0)$.

D'où la *nouvelle notation* : $df_{x_0}(h) = f'(x_0) \,.\, h$

Plus généralement, pour toute valeur x en laquelle f est différentiable

$$df_x(h) = f'(x)\, k.\, h$$

- Puisque l'on pose souvent $y = f(x)$, on note, comme nous l'avons signalé au § 1, $dy = df_{x_0}(h)$, ce qui conduit donc à écrire :

$$dy = f'(x) \,.\, h$$

● Soit $\underline{1}_{\mathbb{R}}$ l'application identique de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$: $(x \overset{\underline{1}_{\mathbb{R}}}{\longmapsto} x)$.

Puisque $x + h = x + h$, la fonction $\underline{1}_{\mathbb{R}}$ est *différentiable en tout point* x, et son nombre dérivé est 1 quel que soit x.

L'application différentielle de la fonction $\underline{1}_{\mathbb{R}}$ est donc la fonction identique $\underline{1}_{\mathbb{R}}$.

En utilisant les notations ci-dessus, cela conduit à $dy = 1 \,.\, h$. Et comme ici $y = x$, on convient de noter dx cette différentielle.

D'où :

$$dx = h$$

● On notera donc $dy = f'(x) \,.\, dx$ *la différentielle de la fonction* f *au point* x.

Dans cette écriture il importe de remarquer que :

- dy est la différentielle au point x de la fonction f;
- $f'(x)$ est le nombre dérivé de f au point x;
- dx est la variable; c'est aussi la différentielle, en tout point, de la fonction $\underline{1}_{\mathbb{R}}$.

● Par suite :

En tout point x *en lequel la fonction* f *est différentiable, le nombre dérivé* f'(x) *est égal au* **quotient** *des deux différentielles* dy *et* dx *en ce point* :

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$



EXERCICES

14-1 **Calculer les nombres dérivés pour 1, ou 2, ou — 2, des fonctions f ci-dessous. Construire les tangentes, aux points considérés, aux courbes d'équation y = f(x).**

(1) $f(x) = x^2$

(2) $f(x) = -\dfrac{x^2}{2}$

(3) $f(x) = -\dfrac{1}{x}$

(4) $f(x) = -\dfrac{1}{2x}$

14-2 **Les fonctions f ci-dessous sont-elles dérivables pour x = 2 ?**

Dans l'affirmative, calculer le nombre dérivé et construire la tangente à la courbe y = f(x) au point d'abscisse 2.

(1) $f(x) = x^2 - 3x + 4$ | (2) $f(x) = -x^2 + x - 1$

(3) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ | (4) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+4}$

(5) $f(x) = \sqrt{(x-2)^2}$ | (6) $f(x) = \sqrt{x^2}$.

14-3 **Existe-t-il un point de la courbe d'équation y = f(x) où la tangente a pour coefficient directeur — 5 ?**

(1) $f(x) = 5x^2$ | (2) $f(x) = -\dfrac{4}{3}x^2$

(3) $f(x) = \dfrac{5}{2x}$ | (4) $f(x) = -\dfrac{2}{x}$.

14-4 **Etudier, pour x = 1, la dérivabilité des fonctions f ci-dessous.**

Construire, éventuellement, les tangentes, ou demi-tangentes, aux points d'abscisse 1 aux courbes d'équation y = f(x).

(1) $f(x) = \sqrt{x-1}$ | (2) $f(x) = |x-1|$

(3) $f(x) = \sqrt{(x)-1)^2 \cdot (x-2)}$ | (4) $f(x) = (x-1) \cdot \sin \dfrac{1}{x-1}$.

14-5 Soit f l'application, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, telle que $f(x) = x^2$.

1° Définir la différentielle df_1 de f pour $x = 1$.

2° Dans quel intervalle de centre 1, peut-on écrire $f(x) = 1 + df_1(x-1)$ avec une marge d'incertitude inférieure à 10^{-4} ?

En déduire alors immédiatement, avec une telle marge d'incertitude : $(0{,}9998)^2$.

14-6 Soit f l'application, de $\mathbb{R} - \{0\}$ vers $\mathbb{R}$, telle que $f(x) = \dfrac{2}{x}$.

1° Définir la différentielle df_1 de f pour $x = 1$.

2° En posant $h = x - 1$, indiquer un intervalle, de centre 1, dans lequel on peut poser $f(1+h) = 2 + df_1(h)$ avec une marge d'incertitude inférieure à 0,0004.

En déduire, avec cette marge d'incertitude, $\dfrac{2}{1{,}002}$ et $\dfrac{2}{0{,}9997}$.

14-7 1° Calculer le nombre dérivé, pour x_0, de la fonction numérique f telle que :

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 3.$$

2° Déterminer la dérivée première de la fonction f.

3° En déduire les nombres dérivés pour $x \in \{-3, -2, 0, 1, 3, 5\}$

4° *Généralisation*, a, b, c étant trois nombres réels donnés, déterminer la dérivée première de la fonction numérique g telle que $g(x) = ax^2 + bx + c$.

INDICATIONS

14-1 Pour $x = 1$, les nombres dérivés sont respectivement 2, -1, 1, $\frac{1}{2}$ et les tangentes correspondantes sont construites fig. 9.

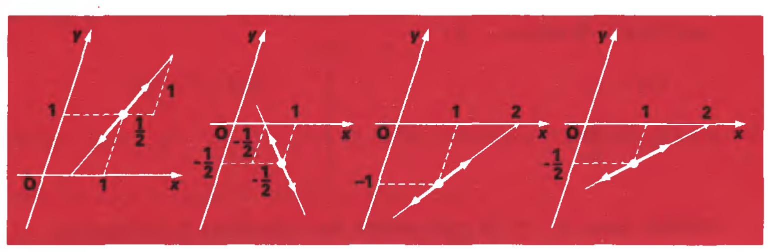


Fig. 9.

14-2 (5) La fonction f n'est pas dérivable pour $x = 2$.

14-3 Calculer le nombre dérivé $f'(x)$, puis résoudre l'équation $f'(x) = -5$.

14-4 Aucune de ces fonctions n'est dérivable pour $x = 1$.
(1) Tangente parallèle à Oy.
(2) et (3) Demi-tangentes à droite et à gauche.
(4) Pas de tangente.

14-5 df_1 est telle que $df_1(h) = 2h$ et $f(1 + h) = 1 + df_1(h) + h^2$.

14-6 $f(1 + h) = 2 + df_1(h) + \varepsilon$ avec $\varepsilon = \frac{2h}{1+h}$. Si $h > 0$, on réalise $\varepsilon < \frac{4}{10^4}$ avec $h < \frac{2}{100}$. Si $h < 0$, il suffit que $|h| < \frac{1}{100}$.

D'où : $\frac{2}{1{,}002} = 1{,}996$ et $\frac{2}{0{,}9997} = 2{,}0006$ avec la marge d'incertitude indiquée.

14-7 1° et 2° $f_1(x_0) = 4x_0 - 5$.

DÉRIVÉES DES FONCTIONS USUELLES



● *Dans la leçon précédente, nous avons défini, puis étudié, l'ensemble des fonctions numériques dérivables en un « point » x_0. Si f est une telle fonction, nous avons ensuite défini une nouvelle fonction, appelée* **dérivée première** *de f, et notée f', qui, à chaque valeur x_0, associe le nombre dérivé de f au point x_0.*

● *L'objet de cette leçon est de répondre aux deux questions suivantes :*

— *les fonctions dites « usuelles » admettent-elles des dérivées premières?*

— *dans l'affirmative, quelles sont ces fonctions?*

● *Nous allons donc retrouver, dans ce qui suit, les résultats établis en Classe de Première (9e leçon, page 85). Nous compléterons cette étude par celle des dérivées des* **fonctions circulaires.**

1. MÉTHODE GÉNÉRALE

La recherche de la dérivée (première) éventuelle d'une fonction numérique f comporte les étapes suivantes (cf. 14e leçon, § 8) :

● préciser l'ensemble E de définition de f;

● *étudier la* ***dérivabilité*** *au point* x_0 *;*

si x_0 est *adhérent* à E (c'est-à-dire si tout voisinage de x_0 rencontre E), chercher si le rapport $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ a une limite finie A_0, lorsque h tend vers zéro (ou bien chercher si $f(x_0+h)$ s'écrit sous la forme

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h\,[A_0 + \varepsilon] \quad \text{avec} \quad \lim_{h\to 0} \varepsilon = 0).$$

Alors A_0 est le nombre dérivé de f pour la valeur (ou « au point ») x_0.

● **Fonction dérivée.**

S'il existe une fonction — notée f' — telle que : quel que soit x_0, $A_0 = f'(x_0)$, alors la fonction f' est la *fonction dérivée* (première) de f.

2

2. DÉRIVÉE PREMIÈRE D'UNE FONCTION « CONSTANTE »

● Désignons par f l'application « constante » de $\mathbb{R}$ sur le nombre a, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a$$

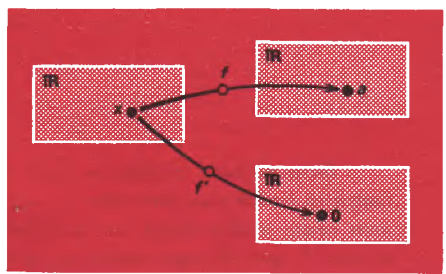


Fig. 1.

● **Dérivabilité au « point » x_0.**
Au voisinage du point x_0,

$$f(x_0 + h) = a.$$

D'où

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = 0 \text{ et } \lim_{h \to 0} 0 = 0.$$

La fonction f est dérivable et son nombre dérivé est 0.

● **Fonction dérivée.**
Il existe donc une fonction dérivée : c'est la fonction nulle.
Toute fonction constante f, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie par f(x) = a, est dérivable en tout point; sa fonction dérivée f′ est la fonction nulle :

c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 0 \quad$ (fig. 1).

3. DÉRIVÉE PREMIÈRE DE LA FONCTION IDENTIQUE

● Soit $1_{\mathbb{R}}$ la fonction identique de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $1_{\mathbb{R}}(x) = x$

● **Dérivabilité au « point » x_0.**
Puisque, quel que soit x_0 : $1_{\mathbb{R}}(x_0 + h) = x_0 + h$, la fonction $1_{\mathbb{R}}$ *est dérivable et son nombre dérivé est* 1 (fig. 2).

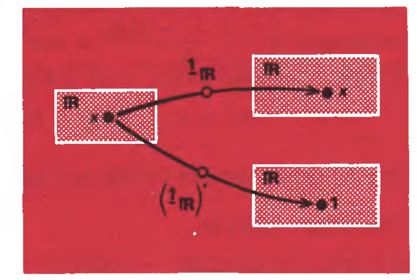


Fig. 2.

● **Fonction dérivée.**

La fonction identique $1_{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, est dérivable en tout point; sa fonction dérivée est la fonction constante telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (1_{\mathbb{R}})'(x) = 1$$

4. DÉRIVÉE PREMIÈRE DE LA FONCTION « CARRÉE »

● Désignons par f l'application « carré », de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^+$, telle que :

$$f(x) = x^2$$

● **Dérivabilité pour x_0.**

Au voisinage du point x_0 : $f(x_0 + h) = (x_0 + h)^2 = (x_0)^2 + 2hx_0 + h^2$.

D'où : $f(x_0 + h) = f(x_0) + h[2x_0 + h)$.

Donc *quel que soit* x_0, *la fonction* f *est dérivable et son nombre dérivé est* $2x_0$.

● **Fonction dérivée.**

Il existe donc une fonction dérivée; c'est la fonction f' telle que, quel que soit x :

$$f'(x) = 2x.$$

● **La fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^+$, définie par $f(x) = x^2$, est dérivable en tout point; sa fonction dérivée f′ est telle que :**

$$f'(x) = 2x$$

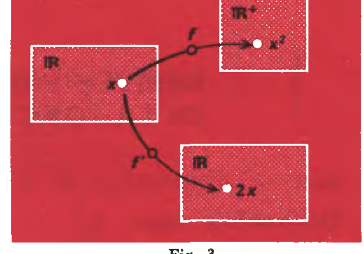


Fig. 3.

On dit, plus brièvement, de façon incorrecte : **la dérivée de x^2 est 2x.** Ce résultat est schématisé figure 3.

5. DÉRIVÉE PREMIÈRE DE LA FONCTION « CUBE »

● Désignons par f l'application, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, telle que : $f(x) = x^3$

● **Dérivabilité pour x_0.**

Au voisinage du point x_0 :

$$f(x_0 + h) = (x_0 + h)^3 = (x_0)^3 + 3(x_0)^2h + 3x_0h^2 + h^3.$$

D'où : $f(x + h) = f(x_0) + h[3(x_0)^2 + 3x_0h + h^2]$.

Or, $\lim\limits_{h \to 0} (3x_0h + h^2) = 0$.

Donc, quel que soit x_0, *la fonction* f *est dérivable et son nombre dérivé est* $3(x_0)^2$.

- **Fonction dérivée.**

Il existe donc une fonction dérivée; c'est la fonction f' telle que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$.

La fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie par $f(x) = x^3$ est dérivable en tout point ; sa fonction dérivée f′ est telle que :

$$f'(x) = 3x^2$$

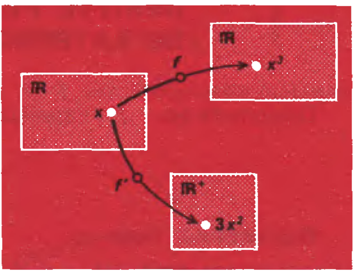


Fig. 4.

On énonce, de façon incorrecte : **la dérivée de x^3 est $3x^2$.** Ce résultat est schématisé figure 4.

6. DÉRIVÉE PREMIÈRE DE LA FONCTION « PUISSANCE QUATRIÈME »

- Soit f l'application, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^+$, telle que $f(x) = x^4$
- **Dérivabilité pour x_0.**

Au voisinage du point x_0 :

$$f(x_0 + h) = (x_0 + h)^4 = (x_0)^4 + 4(x_0)^3h + 6(x_0)^2h^2 + 4x_0h^3 + h^4.$$

D'où : $f(x_0 + h) = f(x_0) + h[4(x_0)^3 + 6(x_0)^2h + 4x_0h^2 + h^3]$.

Or : $\lim\limits_{h \to 0} [6(x_0)^2h + 4x_0h^2 + h^3] = 0$.

Donc, quel que soit x_0, *la fonction* f *est dérivable et son nombre dérivé est* $4(x_0)^3$.

- **Fonction dérivée.**

Il existe donc une fonction dérivée; c'est la fonction f' telle que :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = 4x^2.$$

La fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie par $f(x) = x^4$, est dérivable en tout point ; sa fonction dérivée f′ est telle que :

$$f'(x) = 4x^3$$

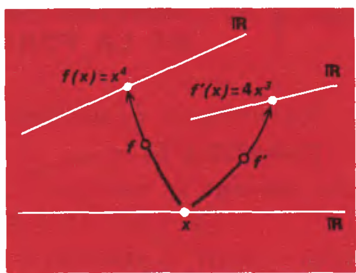


Fig. 5.

On énonce : **la dérivée de x^4 est $4x^3$.** Ce résultat est schématisé figure 5.

REMARQUE

Il est naturel de généraliser ce qui précède : **étant donné un entier naturel n, la fonction numérique f telle que f(x) = x^n admet-elle une fonction dérivée première?**

Nous répondrons à cette question dans la leçon suivante (§ 4).

7. DÉRIVÉE PREMIÈRE DE LA FONCTION « INVERSE DE... »

- Soit f l'application de $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ vers $\mathbb{R}$, telle que $\mathbf{f(x) = \frac{1}{x}}$.

- **Dérivabilité pour x_0.**

Au voisinage du point x_0, dans $\mathbb{R}^{*+}$ ou $\mathbb{R}^{*-}$, $f(x_0 + h) = \frac{1}{x_0 + h}$.

D'où
$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = -\frac{1}{x_0(x_0 + h)}.$$

Or :
$$\lim_{h \to 0} -\frac{1}{x_0(x_0 + h)} = -\frac{1}{(x_0)^2}.$$

Donc, quel que soit $x_0 \neq 0$, la fonction f est dérivable et son nombre dérivé est $-\frac{1}{(x_0)^2}$.

- **Fonction dérivée.**

Il existe donc une fonction dérivée; c'est la fonction f' telle que :
$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \qquad f'(x) = \frac{1}{x^2}.$$

La fonction f de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}$, telle que $\mathbf{f(x) = \frac{1}{x}}$, est dérivable en tout point; sa fonction dérivée est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}^*$, telle que :

$$\mathbf{f'(x) = -\frac{1}{x^2}}$$

On énonce : **la dérivée de $\frac{1}{x}$ est $-\frac{1}{x^2}$.**

Ce résultat est illustré figure 6.

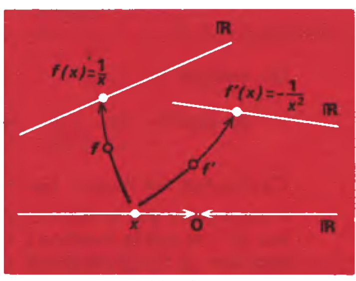


Fig. 6.

8. DÉRIVÉE PREMIÈRE DE LA FONCTION « RACINE CARRÉE DE... »

- Soit f l'application de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$, telle que $\mathbf{f(x) = \sqrt{x}}$
- **Dérivabilité pour x_0.**

Au voisinage du point x_0, dans $\mathbb{R}^+$, $f(x_0 + h) = \sqrt{x_0 + h}$.

D'où
$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h}.$$

Et, par multiplication et division par $(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})$:
$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}}.$$

Or, si nous admettons que f est continue en tout point, alors :
$$\lim_{h \to 0} \sqrt{x_0 + h} = \sqrt{x_0}.$$

Alors : $\lim\limits_{h \to 0} (\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}) = 2\sqrt{x_0}$.

Par suite : si $x_0 \neq 0$, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

Donc, quel que soit $x_0 > 0$, la fonction f est dérivable au point x_0 et son nombre dérivé est $\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

- **Fonction dérivée.**

Il existe donc une fonction dérivée; c'est la fonction f' telle que, quel que soit $x \in \mathbb{R}^{*+}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

La fonction f de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$, telle que $\mathbf{f(x) = \sqrt{x}}$, est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^{*+}$; sa fonction dérivée est la fonction f′ définie sur $\mathbb{R}^{*+}$, telle que $\mathbf{f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$

On énonce :

la dérivée de $\sqrt{x}$ est $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Ce résultat est illustré figure 7.

Il est à noter que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^+$, et que la fonction f' n'est définie que sur $\mathbb{R}^{*+}$, c'est-à-dire que f n'est pas dérivable, à droite, pour la valeur 0.

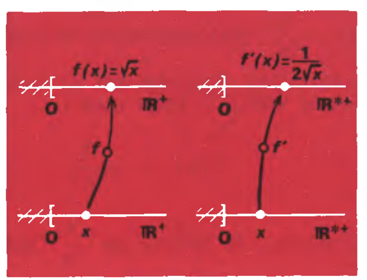


Fig. 7.

9. DÉRIVÉE PREMIÈRE DE LA FONCTION SINUS

• DÉFINITION

Quel que soit le nombre réel x, il existe un angle $\widehat{x}$ dont la mesure, **en radians** est égal à x. Le sinus de cet angle est alors bien défini (Cours de Première, page 194).

La fonction sinus est la fonction numérique qui, à x *réel, fait correspondre le nombre réel* sin x.

Cette fonction est définie dans $\mathbb{R}$ et prend ses valeurs sur le segment $[-1, +1]$.

• Dérivabilité pour la valeur x_0.

Calculons le rapport $r = \dfrac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h}$.

Admettons que (cf. remarques ci-dessous, ❺) :

$$\sin(x_0 + h) - \sin x_0 = 2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right).$$

Alors $r = \dfrac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos\left(x_0 + \dfrac{h}{2}\right)$.

— Si la fonction *cosinus* est continue, ce que nous admettons, alors :

$$\lim_{h \to 0} \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) = \cos x_0.$$

— Si nous admettons que, pour α **en radians**, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ (cf. remarques ❻ ci-dessous), alors :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} = \cos x_0.$$

Donc (sous réserve des résultats admis) :

Quel que soit x_0, *la fonction sinus est dérivable pour la valeur* x_0 *et son nombre dérivé est* $\cos x_0$.

• Fonction dérivée.

La fonction sinus est dérivable pour toute valeur ; sa fonction dérivée première est la fonction cosinus.

REMARQUES

❶ De façon abrégée, on énonce : **la dérivée de sin x est cos x.**

❷ Le schéma ci-contre (fig. 8) résume le résultat obtenu.

❸ Puisque, quel que soit x, $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ le nombre dérivé, pour la valeur x_0, de la fonction sinus, est $\sin\left(x_0 + \frac{\pi}{2}\right)$.

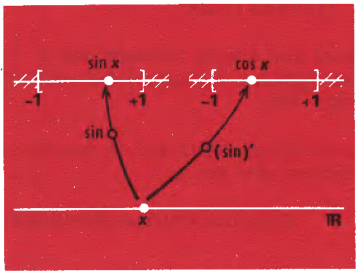


Fig. 8.

❹ Puisque, quel que soit x, $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ (cf. Classe de Première, page 191) : **le nombre dérivé, pour la valeur x, de la fonction sinus, est** $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

❺ Nous avons utilisé la relation $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Cette formule résulte de théorèmes qui ne sont pas au programme de la classe. Indiquons cependant, dans le cas particulier où $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$, une justification de ce résultat.

Soit M et P les points du cercle trigonométrique tels que $\widehat{AOM} = \alpha$ et $\widehat{AOP} = \beta$ (fig. 9). Si m et p sont les projections orthogonales de M et P sur l'axe Oy, alors : $pm = Om - Op = \sin\alpha - \sin\beta$.

Or : pm est la projection orthogonale de MP sur Oy,
l'angle de MP et de Oy est égal à l'angle de Ou et Ox, soit $\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Par suite $pm = \text{MP}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ soit $\sin\alpha - \sin\beta = \text{MP}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Si I est le milieu de MP :
$\text{PI} = \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ (triangle rectangle OPI avec OP = 1).
Or MP = 2 PI.

D'où le résultat : $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$.

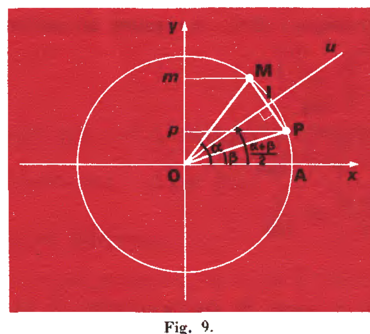


Fig. 9.

Fig. 10.

6 Nous avons admis que, **pour** α **en radians**, $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$.

Indiquons une justification « intuitive » de ce résultat.

— Notons d'abord que si α est négatif, alors, en posant $\alpha = -\alpha'$ (avec $\alpha' > 0$) :

$$\lim_{\alpha' \to 0} \frac{\sin \alpha'}{\alpha'} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin(-\alpha)}{(-\alpha)} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

Nous supposerons donc $\alpha > 0$.

— Soit AOM $= \alpha$ (fig. 10).

Il semble « intuitif » que :

aire triangle AOM $\leqslant$ aire secteur circulaire $\overset{\frown}{\text{OAM}}$ $\leqslant$ aire triangle AOT.

Or l'aire du cercle trigonométrique (de rayon 1) est π. Si nous admettons la proportionnalité de l'aire d'un secteur à la mesure, en radians, de son angle au centre, alors :

$$\text{aire secteur } \overset{\frown}{\text{OAM}} = \frac{\alpha}{2}.$$

D'autre part,

$$\text{aire triangle AOM} = \frac{1}{2} \cdot \text{MH} \times \text{OA} = \frac{1}{2} \sin \alpha.$$

$$\text{aire triangle AOT} = \frac{1}{2} \cdot \text{AT.OA} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Par suite

$$\sin \alpha \leqslant \alpha \leqslant \operatorname{tg} \alpha$$

ou

$$1 \leqslant \frac{\alpha}{\sin \alpha} \leqslant \frac{1}{\cos \alpha}$$

soit encore

$$\cos \alpha \leqslant \frac{\sin \alpha}{\alpha} \leqslant 1$$

Or nous avons admis que *la fonction cosinus est continue.*

Par suite $\lim\limits_{\alpha \to 0} \cos \alpha = 1$. Il en résulte que $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$.

7 Soit d la mesure, **en degrés**, d'un angle $\widehat{x}$. Soit r la mesure, **en radians**, de cet angle.

Alors $$\frac{r}{d} = \frac{\pi}{180}$$

Par suite $$\frac{\sin d}{d} = \frac{\sin r}{r} \cdot \frac{r}{d} = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{\sin r}{r}.$$

Donc $$\lim_{d \to 0} \frac{\sin d}{d} = \frac{\pi}{180}.$$

Il en résulte que :

Si d est la mesure, en degrés, d'un angle, le nombre dérivé de la fonction, (encore appelée, malencontreusement, **sinus**) **est :**

$$\frac{\pi}{180} \cos d$$

10. DÉRIVÉE PREMIÈRE DE LA FONCTION COSINUS

● *La fonction cosinus est la fonction numérique qui, à x réel, fait correspondre le nombre réel* $\cos x$ (cf. Classe de 1re, page 197).

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et prend ses valeurs sur le segment $[-1, +1]$.

● **Dérivabilité pour x_0.**

Nous devons chercher si le rapport $\dfrac{\cos(x_0 + h) - \cos x_0}{h}$ a une limite finie lorsque h est voisin de zéro.

Or $\cos(x_0 + h) - \cos x_0 = \sin\left[\dfrac{\pi}{2} - (x_0 + h)\right] - \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x_0\right)$.

D'après la formule utilisé au § 9 :

$$\sin\left[\frac{\pi}{2} - (x_0 + h)\right] - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right) = 2 \sin \frac{-h}{2} \cdot \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\right]$$
$$= -2 \sin \frac{h}{2} \cdot \sin\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)$$

Donc $$\frac{\cos(x_0 + h) - \cos x_0}{h} = -\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \sin\left(x_0 + \frac{h}{2}\right).$$

La fonction sinus étant dérivable pour toute valeur de x est continue (14e leçon, § 5). Par suite $\lim_{h \to 0} \sin\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) = \sin x_0$.

D'autre part :
$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1.$$

Donc : *quel que soit* x_0, *la fonction cosinus est dérivable pour la valeur* x_0 *et son nombre dérivé est* **— sin x_0**.

● **Fonction dérivée.**

D'après ce qui précède, on peut énoncer :
La fonction cosinus est dérivable pour toute valeur ; sa fonction dérivée première est la fonction (— sinus).

REMARQUES

❶ De façon abrégée, on énonce : **la dérivée de cos x est — sin x.**

❷ Le schéma ci-contre (fig. 11) résume le résultat obtenu.

❸ Puisque quel que soit x,
$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x,$$
le nombre dérivé, pour la valeur x_0, de la fonction cosinus, est $\cos\left(x_0 + \frac{\pi}{2}\right)$.

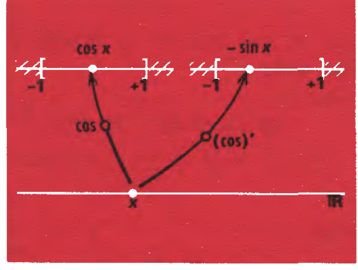


Fig. 11.

❹ On démontre comme ci-dessus (§ 9) que :
Si d est la mesure, **en degrés,** d'un angle, la fonction qui, à d, fait correspondre cos d est dérivable quel que soit d; son nombre dérivé est
$$-\frac{\pi}{180} \sin d.$$

11. DÉRIVÉE PREMIÈRE DE LA FONCTION TANGENTE

● *La fonction tangente est la fonction numérique qui, à* $\widehat{x}$ *réel* (mesure en radians d'un angle $\widehat{x}$), *fait correspondre le nombre tg* x.

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R} - E$, en désignant par E l'ensemble des réels $\frac{\pi}{2} + k\pi$, avec k entier relatif. On note $E = \frac{\pi}{2} + \pi\,\mathbb{Z}$.

- **Dérivabilité pour la valeur x_0.**

Soit $x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Calculons le rapport $r = \frac{\operatorname{tg}(x_0 + h) - \operatorname{tg} x_0}{h}$

$$\text{Or : } \operatorname{tg}(x_0 + h) - \operatorname{tg} x_0 = \frac{\sin(x_0 + h)}{\cos(x_0 + h)} - \frac{\sin x_0}{\cos x_0}$$

$$= \frac{\sin(x_0 + h)\cos x_0 - \sin x_0 \cos(x_0 + h)}{\cos x_0 \cdot \cos(x_0 + h)}.$$

D'autre part, les fonctions sinus et cosinus étant dérivables pour la valeur x_0 les nombres dérivés respectifs étant $\cos x_0$ et $-\sin x_0$ (cf. § 9 et § 10) :

$$\begin{cases} \sin(x_0 + h) = \sin x_0 + h[\cos x_0 + \varepsilon_1] & \text{avec} \quad \lim\limits_{h \to 0} \varepsilon_1 = 0 \\ \cos(x_0 + h) = \cos x_0 + h[-\sin x_0 + \varepsilon_2] & \text{avec} \quad \lim\limits_{h \to 0} \varepsilon_2 = 0 \end{cases}$$

Par suite :

$$\operatorname{tg}(x_0 + h) - \operatorname{tg} x_0 = \frac{h(\cos^2 x_0 + \sin^2 x_0) + h[\varepsilon_1 \cos x_0 - \varepsilon_2 \sin x_0]}{\cos x_0 \cdot \cos(x_0 + h)}.$$

D'où :

$$r = \frac{1 + \varepsilon_1 \cos x_0 - \varepsilon_2 \sin x_0}{\cos x_0 \cdot \cos(x_0 + h)}.$$

Puisque $\lim\limits_{h \to 0} \cos(x_0 + h) = \cos x_0$, $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon_1 = 0$ et $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon_2 = 0$, il semble intuitif, et nous admettrons ce résultat, que $\lim\limits_{h \to 0} r = \frac{1}{\cos^2 x_0}$.

Donc, *quel que soit* $x_0 \in \mathbb{R} - E$, *la fonction tangente est dérivable et son nombre dérivé est* $\frac{1}{\cos^2 x_0}$.

- **Fonction dérivée.**

La fonction tangente est dérivable pour tout $x_0 \in \mathbb{R} - E$; *sa fonction dérivée première est la fonction* $f' = \frac{1}{(\text{cosinus})^2}$

REMARQUES

❶ De façon abrégée, on énonce :

la dérivée de tgx est $\frac{1}{\cos^2 x}$.

❷ Le schéma ci-contre (fig. 12) illustre le résultat obtenu.

❸ Puisque $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$ (Classe de Première, page 180), on peut également énoncer :

la dérivée de tgx est $(1 + tg^2 x)$.

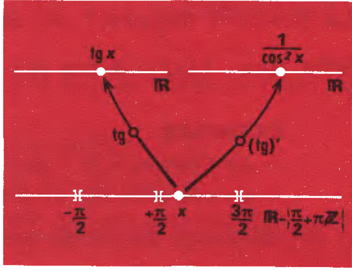


Fig. 12.

❹ Nous établirons ces résultats par une méthode différente dans la leçon suivante (§ 6).

❺ Si d est la mesure, en degrés, d'un angle, la fonction qui, à d, fait correspondre $tg\ d$ a pour nombre dérivé (si $d \neq 90° + k.\ 180°$) : $\frac{\pi}{180°} \cdot \frac{1}{\cos^2 d}$.

12. DÉRIVÉES DES FONCTIONS $x \mapsto \sin(ax + b)$

• Soit f la fonction telle que $f(x) = \sin(ax + b)$.

Elle est définie quel que soit x et prend ses valeurs sur $[-1, +1]$.

• **Dérivabilité pour x_0.**

Calculons le rapport :

$$r = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\sin[a(x_0 + h) + b] - \sin(ax_0 + b)}{h}.$$

D'après la formule utilisée (§ 9) :

$$\sin[a(x_0 + h) + b] - \sin(ax_0 + b) = 2 \sin \frac{ah}{2} \cos\left(ax_0 + b + \frac{ah}{2}\right).$$

D'où :

$$r = a.\frac{\sin \frac{ah}{2}}{\frac{ah}{2}} \cdot \cos\left(ax_0 + b + \frac{ah}{2}\right)$$

Si $\alpha = \frac{ah}{2}$, $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ et $\lim\limits_{\alpha \to 0} \cos(ax_0 + b + \alpha) = \cos(ax_0 + b)$.

Dans ces conditions, il semble intuitif, et nous admettrons ce résultat, que :

$$\lim_{h \to 0} r = a \cos(ax_0 + b).$$

Donc, *quel que soit* x_0, *la fonction qui, à* x_0, *fait correspondre sin* $(ax_0 + b)$ *est dérivable ; son nombre dérivé est* $a.\cos(ax_0 + b)$.

• **Fonction dérivée.**

La fonction dérivée f′ de la fonction x $\overset{}{\mapsto}$ sin (ax + b) est donc telle que **$f'(x) = a \cos(ax + b)$**

EXEMPLES

1. La « dérivée » de $\sin 2x$ est $2 \cos 2x$.
2. La « dérivée » de $\sin(3x - \alpha)$, où α est une constante, est $3 \cos(3x - \alpha)$.

• On démontre de même que : **la fonction dérivée g′ de la fonction $x \overset{g}{\mapsto} \cos(ax + b)$ est telle que** **$g'(x) = -a \sin(ax + b)$**

EXEMPLES

1. La « dérivée » de $\cos 2x$ est $-2 \sin 2x$.
2. La « dérivée » de $\cos(3x + \alpha)$, où α est une constante, est $-3 \sin(3x + \alpha)$.

13. TABLEAU DES DÉRIVÉES PREMIÈRES DE FONCTIONS NUMÉRIQUES USUELLES

Résumons ci-dessous les résultats obtenus dans cette leçon :

Fonction f	Fonction dérivée première f'
$f(x)$	$f'(x)$
C (constante)	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^1	$4x^3$
$\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$ $(x \geqslant 0)$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$

Fonction f	Dérivée première f'
$f(x)$	$f'(x)$
sin x	**cos x** ou $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
cos x	**$-$ sin x** ou $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
tg x $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}\right)$	$\frac{1}{\cos^2 x}$ ou $1 + \text{tg}^2 x$
$\sin(ax + b)$	**$a \cos(ax + b)$**
$\cos(ax + b)$	**$-a \sin(ax + b)$**



EXERCICES

15-1 1° Calculer le nombre dérivé, pour $x = 2$, de la fonction numérique f telle que $f(x) = 3x + 5$.

2° Plus généralement, quel est le nombre dérivé pour x_0 ?

3° Déterminer la fonction dérivée première de la fonction f.

4° *Généralisation.* La fonction numérique g telle que $g(x) = ax + b$ (a et b réels donnés) est-elle dérivable, quel que soit x ? Dans l'affirmative, déterminer sa fonction dérivée g'.

15-2 1° Calculer le nombre dérivé, pour $x = 1$, de la fonction numérique f telle que $f(x) = 3x^2$.

2° Plus généralement, quel est le nombre dérivé pour x_0 ?

3° Déterminer la fonction dérivée première de la fonction f.

4° En déduire les nombres dérivés pour $x \in \{-5, -4, -3, -2, 0, 2, 3, 4\}$.

5° Déterminer la dérivée g' de la fonction numérique g telle que $g(x) = ax^2$ (avec a nombre réel donné).

15-3 1° Calculer le nombre dérivé, pour $x = 2$, de l'application f de $\mathbb{R} - \{0\}$ dans $\mathbb{R} - \{0\}$ telle que $f(x) = \frac{3}{x}$. Plus généralement, calculer ce nombre dérivé pour $x_0 (\neq 0)$.

2° Déterminer la fonction dérivée première de la fonction f.

3° En déduire les nombres dérivés pour $x \in \{-5, -4, -3, -2, -1, 3, 5\}$.

4° Montrer que la fonction numérique g telle que, pour $x \neq 0$, $g(x) = \frac{a}{x}$ (avec a nombre réel donné), est dérivable. Déterminer la dérivée g'.

15-4 1° Quelle est la dérivée première de la fonction numérique f telle que $f(x) = x^3$? En déduire les nombres dérivés pour $x \in \{-3, -2, -1, 0, 2\}$.

2° Montrer que la fonction numérique g telle que $g(x) = ax^3$ (avec a nombre réel donné), est dérivable.
Déterminer la dérivée g'.

15-5 1° Calculer le nombre dérivé, pour $x = 2$, de la fonction numérique f telle que $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$.

2° Calculer le nombre dérivé pour x_0.

3° Déterminer la dérivée première de la fonction f.

4° En déduire les nombres dérivés pour $x \in \{-3, -2, 0, 1, 3, 5\}$.

5° a, b, c étant trois nombres réels donnés, déterminer la dérivée première de la fonction numérique g telle que $g(x) = ax^2 + bx + c$.

15-6 1° Calculer le nombre dérivé, pour $x = 1$, de l'application f, de $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f(x) = \frac{2x+3}{2x-1}$.

Plus généralement, calculer le nombre dérivé pour $x_0\left(\neq \frac{1}{2}\right)$.

2° Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.

3° En déduire les nombres dérivés pour $x \in \{-3, -2, -1, 0\}$.

15-7 1° Quelle est la dérivée de la fonction numérique f telle que $f(x) = x^2$?

2° Existe-t-il des points de la courbe C d'équation $y = x^2$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -4x$?

3° Peut-on déterminer des points de C où la tangente est parallèle à une direction donnée, de coefficient directeur m?

4° Est-il possible de mener, par le point A de coordonnées $(x = -1, y = -3)$ des tangentes à la courbe C? Dans l'affirmative, construire sur un même graphique la courbe C et ces tangentes.

5° Est-il possible de mener, à la courbe C, des tangentes issues du point M de coordonnées (α, β)? Discuter suivant la position du point M dans le plan.

6° Déterminer l'ensemble des points M (α, β) de manière qu'il soit possible de mener par ces points, à la courbe C, deux tangentes perpendiculaires (repère orthonormé).

15-8 1° Construire la courbe C d'équation $y = \frac{4}{x}$.

2° Quel est le nombre dérivé, pour $x_0(\neq 0)$ de la fonction f telle que $f(x) = \frac{4}{x}$?

Quelle est la dérivée de la fonction numérique f?

3° Déterminer les points de la courbe C où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -4x$. Construire ces tangentes sur le graphique du 1°.

4° Existe-t-il des points de la courbe C où la tangente est parallèle à une droite de coefficient directeur m? Discuter.

5° Est-il possible de mener par le point A de coordonnées $(x = -6, y = 2)$ des tangentes à la courbe C? Dans l'affirmative, construire celles-ci sur le graphique obtenu en 1°.

6° Est-il possible de mener par le point M, de coordonnées (α, β), des tangentes à la courbe C? Discuter suivant la position du point M dans le plan.

15-9 1° Quelle est la dérivée première de la fonction f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, telle que $f(x) = \sqrt{x}$? En déduire les nombres dérivés pour les valeurs 1, 4, 5, 16.

2° Construire les tangentes à la courbe (C) d'équation $y = \sqrt{x}$ [on ne demande pas de construire (C)] en ses points d'abscisses 1, 4, 5, 16. Ecrire les équations de ces tangentes.

3° Existe-t-il des points de la courbe (C) où la tangente a pour coefficient directeur un nombre réel donné m?

4° Soit P le point de coordonnées (α, β). Discuter, suivant la position de P, le nombre des tangentes à (C) passant par P. Déterminer l'ensemble des points P tels que les deux tangentes issues de P soient perpendiculaires (repère orthonormé).

15-10 1° Quel est le nombre dérivé de la fonction sinus pour la valeur $\frac{\pi}{3}$?

2° Construire la tangente au point d'abscisse $\frac{\pi}{3}$ à la courbe d'équation $y = \sin x$ (repère orthonormé).

3° Quelle est la différentielle de la fonction sinus pour $x = \frac{\pi}{3}$?

4° En déduire immédiatement une valeur approchée de $\sin 60° 30'$.

15-11 Mêmes questions pour la fonction cosinus.

15-12 1° Quelle est la différentielle, pour $x = \frac{\pi}{4}$, de la fonction tangente ?

2° En déduire une valeur approchée de $\operatorname{tg} 45° 30$.



INDICATIONS

Pour tous les exercices de 15-1 à 15-6, revenir à la définition du nombre dérivé et de la fonction dérivée première.

15-1 2° $f(x_0 + h) = 3(x_0 + h) + 5 = (3x_0 + 5) + 3h$ soit $f(x_0 + h) = f(x_0) + 3h$.
Nombre dérivé : 3.

15-2 2° Nombre dérivé $6x_0$.

3° Alors $f'(x) = 6x$.

15-3 1° $f(x_0 + h) = \frac{3}{x_0 + h}$ et $f(x_0) = \frac{3}{x_0}$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{-3h}{x_0(x_0 + h)} \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0} \frac{-3}{x_0(x_0 + h)} = \dots$$

15-4 1° $f'(x) = 3x^2$; donc $f'(-3) = 27$, $f'(-2) = \dots$

15-5 2° $f(x_0 + h) = 2(x_0 + h)^2 - 5(x_0 + h) + 3$

$f(x_0 + h) = f(x_0) + h[4x_0 - 5 + 2h]$

$f(x_0 + h) = f(x_0) + h[A + \varepsilon(h)]$ avec $A = 4x_0 - 5$

5° $f'(x) = 2ax + b$.

15-6 2° $f'(x) = \dfrac{-8}{(2x-1)^2}$

15-7 2° Puisque $f'(x) = 2x$ ..., il faut et suffit que $2x = -4$ soit $x = -2$.

4° Ecrire l'équation de la tangente à C au point d'abscisse x_0

$y - (x_0)^2 = 2x_0(x - x_0)$ soit...

Cette droite passe par le point A, si et seulement si, ...

15-9 1° $f'(4) = \dfrac{1}{4}$.

15-10 1° Le nombre dérivé demandé est $\cos \dfrac{\pi}{3}$ soit ...

3° Si $f(x) = \sin x$, $df_{\frac{\pi}{3}}(h) = \dfrac{1}{2} h$ (cf. 14e leçon).

4° Pour valeur approchée de $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + h\right)$, on prendra $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} h$.

Attention : h doit être exprimé *en radians*.

OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS DÉRIVABLES

16

● *La méthode employée dans la leçon précédente pour calculer les dérivées premières de fonctions usuelles pourrait, évidemment, s'appliquer dans tous les cas. Mais elle conduirait à des calculs fastidieux et d'une réalisation parfois malaisée.*

● *En vue de remplacer ces calculs par des calculs plus simples, on est amené à étudier le comportement de la* **dérivation** *par rapport aux* **opérations** *sur les fonctions numériques dérivables :*

— *les fonctions somme, produit, quotient, racine carrée,* **de fonctions dérivables sont-elles dérivables ?**

— *dans l'affirmative, de la connaissance des dérivées des fonctions données,* **peut-on déduire simplement les dérivées** *des fonctions somme, produit...?*

● *L'objet de cette leçon est de répondre à ces deux questions. Il s'agit donc seulement de réviser les résultats obtenus en classe de Première (*10[e] *leçon, page* 93*).*

1. DÉRIVABILITÉ (rappel)

● Rappelons (cf. 14[e] leçon, § 1) qu'une fonction numérique f définie sur un voisinage de x_0 est **dérivable** (ou **différentiable**) au « point x_0 » s'il existe un *voisinage* $\mathcal{V}_{x_0}$ de x_0, un *réel* A et une *fonction* ε, tels que, quel que soit $x_0 + h \in \mathcal{V}_{x_0}$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h[A + \varepsilon(h)] \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$



● Le nombre réel A est le **nombre dérivé** de f en x_0.

● La fonction f', telle que $f'(x)$ est le nombre dérivé au point x, s'appelle **fonction dérivée première** de f.

2. DÉRIVÉE D'UNE SOMME DE FONCTIONS DÉRIVABLES

● Soit f et g deux fonctions numériques dérivables sur des ensembles F et G.

Considérons la fonction **somme** $\mathbf{s = f + g}$ qui, à tout $x \in F \cap G$, fait correspondre :

$$s(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{(fig. 1)}$$

La fonction s est-elle dérivable ?
Dans l'affirmative, quelle est sa dérivée première ?

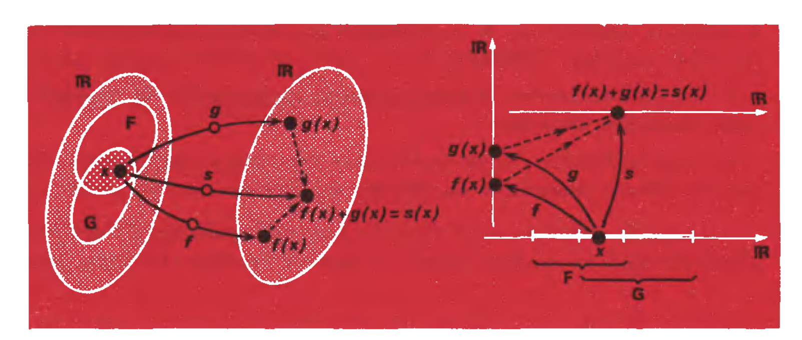


Fig. 1.

● **Dérivabilité en un point.**

Soit $x_0 \in F \cap G$. Les fonctions f et g étant dérivables au point x_0, il existe deux nombres A et B et deux fonctions ε et η, tels que :

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h[A + \varepsilon(h)] \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

et $$g(x_0 + h) - g(x_0) = h[B + \eta(h)] \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} \eta(h) = 0.$$

D'où $$s(x_0 + h) - s(x_0) = h[A + B + \varepsilon(h) + \eta(h)]$$

Il semble intuitif, et nous admettrons ce résultat, que : $\lim_{h \to 0} [\varepsilon(h) + \eta(h)] = 0$.

Par suite, la fonction $s = f + g$ est dérivable pour la valeur x_0, et son nombre dérivé est $A + B$.



• Fonction dérivée.

Désignons respectivement par f' et g' les fonctions dérivées premières de f et g. Alors $A = f'(x_0)$ et $B = g'(x_0)$; à tout point $x_0 \in F \cap G$, la fonction $f' + g'$ fait correspondre le nombre $A + B = f'(x_0) + g'(x_0) = (f' + g')(x_0)$.

Cette fonction est la dérivée première de la fonction $f + g$, soit $s' = f' + g'$

• THÉORÈME 1

La somme $s = f + g$ de deux fonctions numériques dérivables sur un même ensemble est dérivable sur cet ensemble et sa dérivée s' est la somme des fonctions dérivées : $s' = f' + g'$

EXEMPLES

1 Soit la fonction numérique φ telle que $\varphi(x) = x^3 + x^2$

Posons $\varphi = f + g$, avec $f(x) = x^3$ et $g(x) = x^2$.

Alors $f'(x) = 3x^2$ et $g'(x) = 2x$.

Donc φ a pour dérivée la fonction φ' telle que $\varphi'(x) = 3x^2 + 2x$.

2 Soit la fonction numérique φ définie sur $\mathbb{R}^*$ telle que $\varphi(x) = x + \frac{1}{x}$

Posons $\varphi = f + g$, avec $f(x) = x$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.

Alors, sur $\mathbb{R}^*$, $f'(x) = 1$ et $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Donc φ a pour dérivée la fonction φ', définie sur $\mathbb{R}^*$, telle que $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.

• REMARQUE

Le théorème 1 s'étend à un nombre quelconque de fonctions numériques.

Par exemple si $s = f + g + k$ et si les fonctions f, g, k sont dérivables sur un même ensemble E, alors $s' = f' + g' + k'$.

En effet : $s = (f + g) + k$ d'où $s' = (f + g)' + k'$ puis $s' = f' + g' + k'$.

3. DÉRIVÉE PREMIÈRE DE kf (k CONSTANTE, f FONCTION DÉRIVABLE)

● Soit f une application d'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit k un nombre réel donné. Considérons la fonction $\varphi = k \,.\, f$ qui, à tout $x \in E$, fait correspondre : $\varphi(x) = k \,.\, f(x)$.

La fonction φ est-elle dérivable si f l'est ?
Dans l'affirmative, quelle est sa dérivée première ?

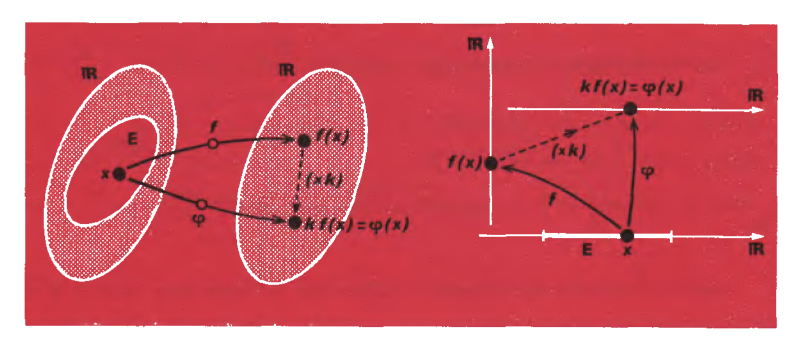


Fig. 2.

● **Dérivabilité en un point.**

Soit $x_0 \in E$. La fonction f étant dérivable au point x_0, il existe un nombre A et une fonction ε tels que :

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h[A + \varepsilon(h)] \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Donc $\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = kh[A + \varepsilon(h)] = h[kA + k \cdot \varepsilon(h)]$

Il semble intuitif, et nous admettrons ce résultat, que : $\lim_{h \to 0} k \cdot \varepsilon(h) = 0$.

Par suite, la fonction $\varphi = k.f$ est dérivable pour la valeur x_0, et son nombre dérivé est kA.

- **Fonction dérivée.**

Désignons par f' la fonction dérivée de f. Alors $A = f'(x_0)$; à tout point $x_0 \in E$, la fonction $k.f'$ fait correspondre le nombre $kA = kf'(x_0)$.

Cette fonction est la dérivée première φ' de la fonction $k.f$, soit $\varphi' = k.f'$

- **THÉORÈME 2**

Le produit $\varphi = k.f$ d'une fonction numérique f dérivable sur un ensemble E, par un nombre réel k, est dérivable sur E, et sa dérivée est la fonction $k.f'$



EXEMPLES

1. **Soit la fonction numérique φ telle que :** $\varphi(x) = \sqrt{3} \cdot x^3$

La fonction f telle que $f(x) = x^3$ a pour dérivée f' telle que $f'(x) = 3x^2$.

La dérivée de φ est donc la fonction φ' telle que : $\varphi'(x) = 3\sqrt{3}\,x^2$

2. **Soit la fonction φ telle que :** $\varphi(x) = 4\,x^2 - \frac{7}{x}$ (avec $x \in \mathbb{R}^*$).

Les théorèmes 1 et 2 ci-dessus conduisent à : $\varphi'(x) = 8\,x + \frac{7}{x^2}$ (avec $x \in \mathbb{R}^*$).

4. DÉRIVÉE D'UN PRODUIT DE FONCTIONS DÉRIVABLES

- Soit f et g deux fonctions numériques dérivables, respectivement, sur des ensembles F et G (fig. 3). Considérons la *fonction produit* $p = f \times g$ qui, à tout $x \in F \cap G$, fait correspondre $p(x) = f(x) \times g(x)$.

La fonction p est-elle dérivable ?
Dans l'affirmative, quelle est sa dérivée première ?

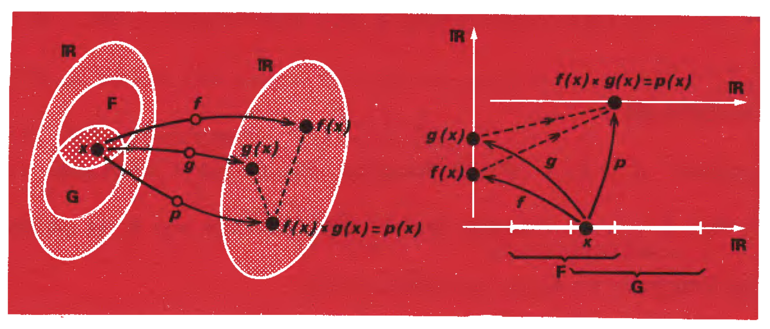


Fig. 3

● **Dérivabilité en un point.**

Soit $x_0 \in F \cap G$. Les fonctions f et g étant dérivables au point x_0, il existe deux nombres A et B et deux fonctions ε et η, tels que :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h[A + \varepsilon(h)] \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

et

$$g(x_0 + h) = g(x_0) + h[B + \eta(h)] \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} \eta(h) = 0.$$

Par suite :

$$p(x_0 + h) - p(x_0) = f(x_0 + h) \cdot g(x_0 + h) - f(x_0) \cdot g(x_0)$$

$$p(x_0 + h) - p(x_0) = h[A \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot B + \zeta(h)]$$

en posant : $\zeta(h) = f(x_0) \cdot \eta(h) + g(x_0) \cdot \varepsilon(h) + h \cdot [A + \varepsilon(h)] \cdot [B + \eta(h)]$.

Il semble intuitif, et nous admettrons ce résultat, que :

$$\lim_{h \to 0} \zeta(h) = 0.$$

La fonction $p = f \times g$ est donc dérivable pour la valeur x_0, et son nombre dérivé est $A \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot B$.

- **Fonction dérivée.**

Désignons respectivement par f' et g' les fonctions dérivées des fonctions f et g.

Alors : $A = f'(x_0)$ et $B = g'(x_0)$

et $A \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot B = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$.

A tout point $x_0 \in F \cap G$, la fonction $f'.g + f.g'$ fait correspondre le nombre $f'(x_0).g(x_0) + f(x_0).g'(x_0)$. C'est la fonction dérivée p' de la fonction p :

$$p' = f'.g + f.g'$$

- **THÉORÈME 3**

Le produit $p = f \times g$ de deux fonctions numériques dérivables sur un même ensemble est dérivable sur cet ensemble, et sa dérivée est la fonction :



$$p' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

EXEMPLE

Soit la fonction numérique f telle que : $f(x) = (x^2 + 3) \cdot (x^2 - 2x)$

On peut effectuer le produit et dériver la somme des termes. On peut aussi appliquer le théorème 3. On obtient ainsi :

$$f'(x) = 2x.(x^2 - 2x) + (x^2 + 3)(2x - 2)$$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 6x - 6$$

REMARQUE

Le théorème 3 s'étend au produit d'un nombre quelconque de fonctions numériques. Soit par exemple $\varphi = f \times g \times h$, les fonctions f, g, h, étant dérivables sur un même ensemble E.

Alors : $\varphi' = [f \times g]' \times h + [f \times g] \times h'$.

Or : $[f \times g]' = f' \times g + f \times g'$.

Donc : $\varphi' = f' \times g \times h + f \times g' \times h + f \times g \times h'$

5. DÉRIVÉE DE LA FONCTION « PUISSANCE n-ième »

Dans la leçon précédente, nous avons étudié la dérivation des fonctions qui, à $x \in \mathbb{R}$ font correspondre x, x^2, x^3, x^4. Il est donc naturel de tenter de généraliser les résultats obtenus, donc d'étudier la dérivée de la fonction φ telle que :

$$x \mapsto \varphi(x) = x^n \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Par définition : $x^n = x^{n-1} \times x$, d'où une **démonstration par récurrence** (cf. 1re leçon, § 5).

❶ Pour $n = 1$, la « dérivée de x » est 1.

❷ *Supposons* que la « dérivée de x^p soit $p\,x^{p-1}$ » et formons la dérivée du produit des deux fonctions :

$$x^p \text{ et } x.$$

Nous obtenons, pour dérivée de x^{p+1} (§ 4) :

$$p\,x^{p-1} \times x + x^p \times 1,$$

soit
$$p\,x^p + x^p$$

ou
$$(p + 1)\,x^p.$$

La propriété admise au ❷ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(x^n)' = n\,x^{n-1}$$

EXEMPLE

La dérivée de la fonction f telle que :

$$f(x) = x^5$$

est :
$$f'(x) = 5\,x^4$$

REMARQUE

Plus généralement, soit f une fonction dérivable.
Posons $\varphi = f^n$, avec $n \in \mathbb{N}$.

La fonction φ, produit de fonctions dérivables, est dérivable (§ 4).

En procédant comme ci-dessus et en utilisant le résultat du § 4, on démontre que:

$$\varphi' = n \,.\, f^{n-1} \,.\, f'$$

6. DÉRIVÉE DU QUOTIENT DE DEUX FONCTIONS DÉRIVABLES

- Soit f et g deux fonctions numériques dérivables respectivement sur des ensembles F et G (fig. 4).

Considérons la fonction quotient :

$q = \frac{f}{g}$ qui, à $x \in F \cap G$ (en supposant $F \cap G \neq \varnothing$) et tel que $g(x) \neq 0$, fait correspondre : $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

La fonction q *est-elle dérivable ?*

Dans l'affirmative, quelle est sa dérivée première ?

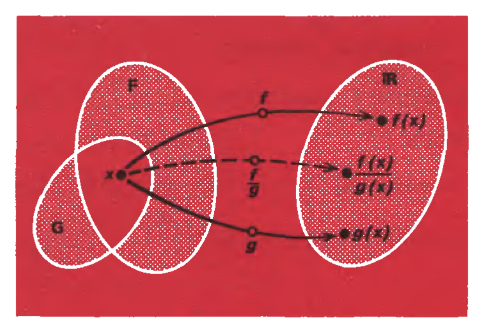


Fig. 4.

- **Dérivabilité en un point.**

Soit $x_0 \in F \cap G$. Supposons $g(x_0) \neq 0$.

Par hypothèse, les fonctions f et g étant dérivables au point x_0, il existe deux nombres A et B et deux fonctions ε et η telles que :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h[A + \varepsilon(h)] \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

et
$$g(x_0 + h) = g(x_0) + h(B + \eta(h)] \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} \eta(h) = 0.$$

Par suite :

$$q(x_0 + h) - q(x_0) = \frac{f(x_0) + h[A + \varepsilon(h)]}{g(x_0) + h[B + \eta(h)]} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

$$q(x_0 + h) - q(x_0) = \frac{h[A \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot B + \varepsilon(h)g(x_0) - \eta(h)f(x_0)]}{g(x_0)\{g(x_0) + h[B + \eta(h)]\}}$$

Il semble intuitif, et nous admettrons ces résultats, que :

$$\begin{cases} \lim_{h \to 0} [\varepsilon(h) \, . \, g(x_0) - \eta(h) \, . \, f(x_0)] = 0 \\ \lim_{h \to 0} h[B + \eta(h)] = 0 \end{cases}$$

Il en résulte qu'il existe $\xi(h)$, avec $\lim_{h \to 0} \xi(h) = 0$, tel que :

$$q(x_0 + h) - q(x_0) = h\left[\frac{A \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot B}{[g(x_0)]^2} + \xi(h)\right]$$

La fonction $q = \frac{f}{g}$ est donc différentiable au point x_0, et son nombre dérivé est :

$$\frac{A \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot B}{[g(x_0)]^2}.$$

- **Fonction dérivée.**

Désignons respectivement par f' et g' les fonctions dérivées de f et g.

Alors : $A = f'(x_0)$ et $B = g'(x_0)$.

A tout point $x_0 \in F \cap G$ et tel que $g(x_0) \neq 0$, la fonction $\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ fait correspondre le nombre $\frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$.

La fonction dérivée de la fonction q est donc $q' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

- **THÉORÈME 4**



Le quotient $q = \frac{f}{g}$ de deux fonctions numériques, dérivables sur un même ensemble, est dérivable pour tout x de cet ensemble tel que $g(x) \neq 0$, et sa dérivée est la fonction $q' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

EXEMPLES

1. Le théorème 4 permet de retrouver deux résultats établis directement dans la leçon précédente.

— Si $f(x) = \frac{1}{x}$ (avec $x \neq 0$) alors $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Si **$f(x) = \text{tg}\, x$** $= \dfrac{\sin x}{\cos x}$, avec $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ (et $k \in \mathbb{Z}$), alors :

$$f'(x) = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - (\cos x)' \cdot \sin x}{[\cos x]^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\cos x)^2}.$$

Donc : $$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

❷ **Soit la fonction f qui, à x réel $\left(\neq \frac{1}{2}\right)$, fait correspondre $f(x) = \dfrac{2x+3}{6x-3}$**

Alors : $$f'(x) = \frac{2(6x-3) - (2x+3).6}{(6x-3)^2} = \frac{-24}{(6x-3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-8}{3(2x-1)^2}$$

❸ **Dérivée première de x^n** (avec n entier relatif).
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons obtenu (§ 5) : $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Si n est négatif, posons $n_1 = -n$, alors $x^n = \dfrac{1}{x^{n_1}}$ avec $n_1 > 0$.
A l'aide du théorème 4 :

$$\left(\frac{1}{x^{n_1}}\right)' = \frac{x^{n_1} \cdot 0 - n_1 x^{n_1 - 1}}{(x^{n_1})^2} = -\frac{n_1}{x^{n_1+1}}$$

Par suite : $$\left(\frac{1}{x^{n_1}}\right) = n\, x^{n-1}$$

Donc : $$\forall n \in \mathbb{Z} \quad (x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

7. DÉRIVÉE PREMIÈRE DE LA RACINE CARRÉE D'UNE FONCTION DÉRIVABLE

• Soit f une fonction dérivable sur un ensemble $\mathcal{I}$.

Supposons que pour $E \subset \mathcal{I}$, $f(x) \geqslant 0$. Considérons alors la fonction $g = \sqrt{f}$ telle que, pour $x \in E$, $g(x) = \sqrt{f(x)}$ (fig. 5).

La fonction g *est-elle dérivable?*

Dans l'affirmative, quelle est sa dérivée première?

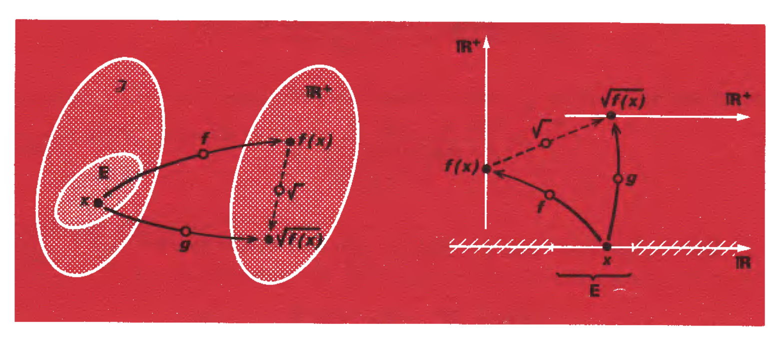


Fig. 5.

● **Dérivabilité en un point.**

Soit $x_0 \in E$. La fonction f étant dérivable sur E, il existe un nombre A et une fonction ε tels que :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h[A + \varepsilon(h)] \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Or : $$g(x_0 + h) - g(x_0) = \sqrt{f(x_0 + h)} - \sqrt{f(x_0)} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{\sqrt{f(x_0 + h)} + \sqrt{f(x_0)}}$$

Par suite : $$g(x_0 + h) - g(x_0) = h \frac{A + \varepsilon(h)}{\sqrt{f(x_0 + h)} + \sqrt{f(x_0)}}$$

La fonction f, dérivable, est continue au point x_0, et $\lim_{h \to 0} \sqrt{f(x_0 + h)} = \sqrt{f(x_0)}$.

Alors, il semble intuitif (et nous admettrons ce résultat) que, si $f(x_0) \neq 0$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{A + \varepsilon(h)}{\sqrt{f(x_0 + h)} + \sqrt{f(x_0)}} = \frac{A}{2\sqrt{f(x_0)}}$$

Il existe donc une fonction η telle que :

$$\begin{cases} \lim_{h \to 0} \eta(h) = 0 \\ \text{et} \\ g(x_0 + h) - g(x_0) = h \left[\dfrac{A}{2\sqrt{f(x_0)}} + \eta(h)\right] \end{cases}$$

La fonction $\sqrt{f}$ est donc dérivable au point x_0 ; et son nombre dérivé est $\dfrac{A}{2\sqrt{f(x_0)}}$.

• Fonction dérivée.

Désignons par f' la fonction dérivée de f. Alors $A = f'(x_0)$; à tout nombre $x_0 \in E$ et tel que $f(x_0) \neq 0$, la fonction $\dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$ fait correspondre le nombre $\dfrac{f'(x_0)}{2\sqrt{f(x_0)}}$.

La fonction dérivée de la fonction $g = \sqrt{f}$ est donc : $g' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$

• THÉORÈME 5

Si f est une fonction dérivable et positive dans un intervalle E, la fonction $\sqrt{f}$ est dérivable pour toute valeur de E telle que $f(x) \neq 0$ et la fonction dérivée est la fonction $\dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$.

EXEMPLES

❶ Nous retrouverons ainsi la dérivée, pour $x > 0$, de $\sqrt{x}$ (15ᵉ leçon, § 8). Dans ce cas la fonction f est la fonction $1_{\mathbb{R}^+}$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ et $f'(x) = 1$.

D'où : pour $x > 0$ $\quad (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

❷ **Soit la fonction g telle que $g(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2}$**

Posons $f(x) = x^3 + 2x^2 = x^2(x + 2)$. La fonction f est définie sur $E = \{x ; x \geqslant -2\}$.

Et $f(x) > 0$ sur $E^* = \{x ; x > -2 \text{ et } x \neq 0\}$. Alors sur E^*, $g'(x) = \dfrac{3x^2 + 4x}{2\sqrt{x^3 + 2x^2}}$

REMARQUE

Il importe de bien noter que la fonction $\sqrt{f}$ est définie aux points x tels que $f(x) = 0$, s'il en existe, mais que, *a priori*, elle n'est pas dérivable en ces points. *On doit alors effectuer une étude directe.*

8. EN RÉSUMÉ

Le tableau ci-dessous résume les résultats obtenus dans ce chapitre (on désigne par E, F, G..., les ensembles sur lesquels les fonctions considérées sont dérivables).

Fonctions	Dérivées premières	Remarques
$f + g$	$f' + g'$	sur $F \cap G$,
$k \,.\, f$	$k \,.\, f'$	k constante
$f \,.\, g$	$f' \,.\, g + f \,.\, g'$	sur $F \cap G$,
$\frac{1}{f}$	$-\frac{f'}{f^2}$	sur $E_1 = E - \{x\,;\, f(x) = 0\}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{g \,.\, f' - f \,.\, g'}{g^2}$	sur $E_1 = (F \cap G_1)$ $= F \cap G - \{x\,;\, g(x) = 0\}$
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	sur $E_1 = E - \{x\,;\, f(x) = 0\}$



EXERCICES

16-1 **Définir les dérivées premières des fonctions numériques f telles que :**

(1) $f(x) = 4x + 2$

(2) $f(x) = 4x^2 - x - 3$

(3) $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - x$

(4) $f(x) = 5x - 2$

(5) $f(x) = 5x^2 - x + 3$

(6) $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 1$

(7) $f(x) = -\frac{x^2}{3} + 2x^2 - x$

(8) $f(x) = 2x^4 - \frac{3x^2}{2} + x - 2$

16-2 **Définir les dérivées premières des fonctions numériques f telles que :**

(1) $f(x) = (x - 4)(x - 3)$

(2) $f(x) = (2x^2 - x)(x^3 + 1)$

(3) $f(x) = (3x + 2)^2(2x + 1)$

(4) $f(x) = (x + 1)(x - 4)(x - 2)$

(5) $f(x) = (x + 1)^2(2x + 1)$

(6) $f(x) = (x^2 - 1)^3$

16-3 **Préciser pour quelles valeurs réelles de x les fonctions f sont dérivables et définir leurs dérivées premières f'. Etudier le signe de f'(x) suivant les valeurs de x.**

(1) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x - 2}$

(2) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 - x - 1}$

(3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$

(4) $f(x) = \dfrac{4x - 5}{-x + 3}$

(5) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x + 4}{x^2 - 4}$

(6) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{(2x + 3)^2}$

16-4 **Déterminer les dérivées premières f' des fonctions f. Etudier la dérivabilité pour x = 1. Préciser la forme de la courbe (C) d'équation y = f(x) dans un voisinage de x = 1. Déterminer le signe de f'(x) suivant les valeurs de x.**

(1) $f(x) = |x - 1|$

(2) $f(x) = \sqrt{(x - 1)}$

(3) $f(x) = (x - 1)^{\frac{2}{3}}$

(4) $f(x) = (x - 1)^{\frac{1}{3}}$

(5) $f(x) = \sqrt{(x - 1)^2(x + 2)}$

(6) $f(x) = x^3 \, . \, (x - 1)^{\frac{1}{3}}$

16-5 **Déterminer les dérivées f' des fonctions f et étudier le signe de f'(x).**

(1) $f(x) = x^4(x + 1)^3$

(2) $f(x) = x^3(x - 6)^2(x - 3)$

(3) $f(x) = \dfrac{x^5}{(2x + 1)^3}$

(4) $f(x) = \left(\dfrac{x}{x + 2}\right)^5$

(5) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$

(6) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x - 4}$

16-6 Soit f la fonction telle que $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$

1° Démontrer que f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$.

2° Démontrer que f est dérivable et que $2\sqrt{1 + x^2} \cdot f'(x) = f(x)$.

3° En déduire que la dérivée seconde f'' vérifie :

$$4(1 + x^2) \, . \, f''(x) + 4\,x\,f'(x) - f(x) = 0.$$

16-7 Soit f l'application de $[1, 12[$ dans $\mathbb{R}$, telle que :

$$\begin{cases} \text{si } 1 \leqslant x < 2, & f(x) = x\,; \\ \text{si } 2 \leqslant x < 6, & f(x) = \dfrac{x + 6}{4}\,; \\ \text{si } 6 \leqslant x < 12, & f(x) = \dfrac{x + 12}{6}. \end{cases}$$

1° Représenter graphiquement f .

2° Démontrer que f est bijective. Représenter graphiquement la fonction réciproque f^{-1}.

3° Démontrer que f^{-1} est dérivable sur $E = [1, 4[- \{2, 3\}$. Définir la dérivée de f^{-1}. Démontrer qu'aux points 2 et 3, la fonction f^{-1} est dérivable à droite et à gauche.



INDICATIONS

16-1 (3) $f'(x) = 6x^2 + 4x - 1$ (8) $f'(x) = 8x^3 - 3x + 1$.

16-2 (6) Utiliser le résultat du § 5 (remarque) $f'(x) = 6x(x^2 - 1)^2$.

16-3 (3) f est définie sur . . .

Pour $x \notin [1, 4]$, $f'(x) = \dfrac{2x - 5}{\sqrt{x^2 - 5x + 4}}$

Par suite $\begin{cases} x < 1 \Longrightarrow f'(x) < 0 \\ x > 4 \Longrightarrow f'(x) > 0. \end{cases}$

16-4 (1) Fig. 6 (2) Fig. 7 (3) Fig. 8 (4) Fig. 9 (5) Fig. 10.

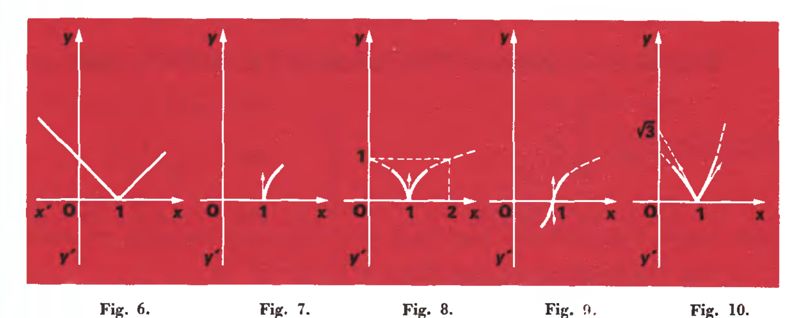


Fig. 6. Fig. 7. Fig. 8. Fig. 9. Fig. 10.

16-5 (1) (2) (3) (4). Utiliser le résultat obtenu § 5 (remarque).

Par exemple n° 4, poser $u(x) = \dfrac{x}{x + 2}$ alors $u'(x) = \dfrac{2}{(x + 2)^2}$

et $$f'(x) = 5[u(x)]^4 \cdot u'(x) = \frac{10x^4}{(x + 2)^6}.$$

16-6 3° Pour calculer f'', dériver $f(x) = 2.\sqrt{1 + x^2}.f'(x)$.

16-7 3° La dérivée de f^{-1} est la restriction, à l'ensemble E, de la fonction « partie entière de... ».

APPLICATION DES DÉRIVÉES A L'ÉTUDE DES VARIATIONS D'UNE FONCTION



● *Après avoir montré que les nombres dérivés d'une fonction (dérivable) monotone dans un intervalle gardent le même signe, on est conduit à étudier le problème inverse, à savoir :*
du signe des nombres dérivés d'une fonction f, peut-on déduire les variations de f ?

● *En classe de Terminale A, nous* **admettrons** *le théorème fondamental et nous l'appliquerons à l'étude, sur des exemples, de quelques fonctions numériques.*

SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION ET SIGNE DE SES NOMBRES DÉRIVÉS

1. SIGNE DES NOMBRES DÉRIVÉS D'UNE FONCTION MONOTONE

EXEMPLES

1 Soit f la fonction, de $\mathbb{R} - \{0\}$ dans $\mathbb{R} - \{0\}$, telle que $f(x) = \frac{3}{x}$.

Soit x_1 et x_2 deux nombres réels distincts non nuls :

$$f(x_1) = \frac{3}{x_1} \quad \text{et} \quad f(x_2) = \frac{3}{x_2}$$

Par suite : $f(x_2) - f(x_1) = \frac{3(x_1 - x_2)}{x_1 x_2}$

et $$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = -\frac{3}{x_1 x_2}$$

Donc, si x_1 et x_2 sont simultanément positifs ou négatifs, $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ est négatif.

La fonction f est strictement décroissante dans les deux intervalles :

$$]-\infty, 0[\quad \text{et} \quad]0, +\infty[$$

où elle est définie.

Or, le nombre dérivé pour la valeur x ($\neq 0$) étant $-\frac{3}{x^2}$ (cf. 16[e] leçon), **les nombres dérivés sont négatifs, quel que soit x.**

❷ Soit f la fonction, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f(x) = 2x^2$

Le nombre dérivé au point x est $4x$ (cf. 16e leçon).

Par suite : **si x est positif,** les nombres dérivés sont positifs ; **si x est négatif,** les nombres dérivés sont négatifs.

D'autre part, soit x_1 et x_2 deux nombres réels, distincts :

$$f(x_1) = (x_1)^2 \qquad f(x_2) = (x_2)^2$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = x_1 + x_2$$

— Si x_1 **et** x_2 sont positifs, $(x_1 + x_2)$ est positif et la fonction f est **croissante.**

— Si x_1 **et** x_2 sont négatifs, $(x_1 + x_2)$ est négatif et la fonction f est **décroissante.**

Donc dans ce cas particulier :

f croissante $\Longleftrightarrow$ les nombres dérivés sont positifs ;

f décroissante $\Longleftrightarrow$ les nombres dérivés sont négatifs.

Plus généralement :

● THÉORÈME



Si la fonction f est dérivable pour la valeur x_0 et si f est monotone croissante (*resp.* décroissante) **dans un voisinage de x_0, alors le nombre dérivé pour x_0 est positif** (*resp.* négatif).

Supposons f *croissante* dans un voisinage V_{x_0} de x_0.

Alors, quels que soient x_1 et x_2 de V_{x_0}, $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

Etudions le rapport $r = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$:

si $h > 0$, alors $x_0 + h > x_0$, donc $f(x_0 + h) \geqslant f(x_0)$ et $r \geqslant 0$

si $h < 0$, alors $x_0 + h < x_0$, donc $f(x_0 + h) \geqslant f(x_0)$ et $r \geqslant 0$.

L'ensemble des nombres réels r est donc minoré par zéro. Nous avons alors admis qu'il a donc une *borne inférieure* (cf. 13e leçon, § 2). Celle-ci ne peut être que positive ou nulle.

D'autre part, *le nombre dérivé* pour la valeur x_0, supposé exister, est égal à $\lim_{h \to 0} r$. On conçoit qu'alors il soit possible de démontrer (ce que nous admettrons) que $\lim_{h \to 0} r \geqslant 0$.

● De ce théorème, on déduit :

P₁ *Dans tout intervalle dans lequel une fonction* f *est* **monotone croissante et dérivable,** les *nombres dérivés* $f'(x)$ sont **positifs** (au sens large).

P₂ *Dans tout intervalle dans lequel une fonction* f *est* **monotone décroissante et dérivable,** *les nombres dérivés* $f'(x)$ sont **négatifs** (au sens large).

2. EXTRÉMUM D'UNE FONCTION EN UN POINT

● DÉFINITIONS

Rappelons les définitions données dans la 13ᵉ leçon (§ 7) :

D₁ *Une fonction* f *définie sur un segment* [a, b], *présente un* **maximum relatif** (au sens large) *au point* x_0 *intérieur à l'intervalle*]a, b[, *s'il existe un voisinage* V_{x_0} *de* x_0, *inclus dans*]a, b[, *tel que* :

$x \in V_{x_0}$ *implique* $f(x) \leqslant f(x_0)$ (fig. 1).

Le maximum est dit *strict* si l'inégalité est stricte.

D₂ *Une fonction* f, *définie sur* [a, b], *présente un* **minimum relatif** (au sens large) *au point* x_0 *intérieur à l'intervalle*]a, b[, *s'il existe un voisinage* V_{x_0} *de* x_0, *inclus dans*]a, b[, *tel que* :

$x \in V_{x_0}$ implique $f(x) \geqslant f(x_0)$ (fig. 2).

Le minimum est dit *strict* si l'inégalité est stricte.

D₃ Un **extrémum** est un maximum ou un minimum.

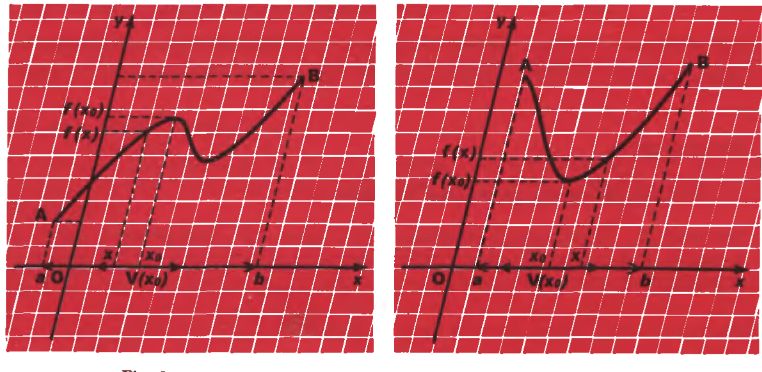


Fig. 1. Fig. 2.

REMARQUE

Rappelons que ces notions sont différentes de celles de **plus grand élément** et de **plus petit élément** de l'ensemble des valeurs prises par $f(x)$ quand x décrit $[a, b]$.

Ainsi, par exemple, la fonction f telle que $f(x) = x - E(x)$, dans laquelle $E(x)$ désigne la partie entière de x, ne présente pas d'extrémum sur le segment $[0, 2]$. Mais l'ensemble des valeurs prises a zéro pour plus petit élément et n'a pas de plus grand élément (fig. 3).

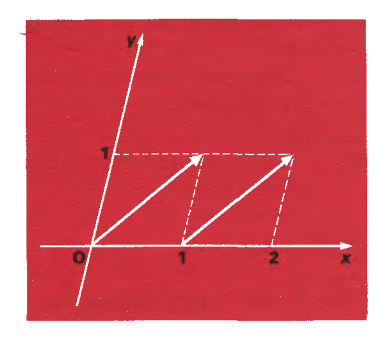


Fig. 3.

● THEORÈME



Si une fonction numérique f, dérivable sur l'intervalle $]a, b[$, présente un extrémum en un point x_0 intérieur à $]a, b[$, alors le nombre dérivé $f'(x_0)$ est nul.

Supposons, par exemple, que f présente un maximum au point x_0.

Soit $V_{x_0} =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ un voisinage de x_0, inclus dans $]a, b[$, et tel que, pour tout $x \in V_{x_0}$, $f(x_0)$ soit supérieur à $f(x)$.

Pour : $x_0 < x \leqslant x_0 + \alpha$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$ et (§ 1) : $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$.

Pour : $x_0 - \alpha \leqslant x < x_0$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$ et (§ 1) : $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$.

Or, l'existence du nombre dérivé au point x_0 implique que ces deux limites soient égales à $f'(x_0)$. Alors $(f'(x_0) \geqslant 0$ et $f'(x_0) \leqslant 0)$ implique : $f'(x_0) = 0$.

REMARQUE

La réciproque de ce théorème est fausse.

Par exemple, la fonction f telle que $f(x) = (x - 1)^3$ est dérivable pour $x = 1$, puisque $f(1 + h) = h^3$, donc $f(1 + h) = f(1) + h[0 + h^2]$ et le nombre dérivé est nul.

Mais si $h > 0$, $f(1 + h) = h^3 > 0$ et si $h < 0$, $f(1 + h) < 0$.

Donc f *n'a pas d'extrémum pour la valeur* 1.

3. SIGNE DES NOMBRES DÉRIVÉS ET SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION

● Au § 2 nous avons démontré que : *si une fonction numérique est* **strictement croissante** (*resp.* décroissante) *dans un voisinage de* x_0 et **dérivable au point** x_0, *alors* $f'(x_0) \geqslant 0$ (*resp.* $f'(x_0) \leqslant 0$).

● Ceci conduit à étudier le problème réciproque, à savoir :
le signe *des nombres dérivés, dont l'existence est supposée, renseigne-t-il sur le sens de variation de la fonction ?*

Le théorème fondamental suivant, **que nous admettrons** ici, résoud le problème posé.

● THÉORÈME FONDAMENTAL

Si une fonction numérique f a, en tout point d'un intervalle $\mathfrak{I}$, des nombres dérivés positifs (*resp.* négatifs), **la fonction est croissante** (*resp.* décroissante) **sur $\mathfrak{I}$.**



REMARQUE

On démontre, et nous l'admettrons ici, le résultat suivant, qui précise le précédent : **si $f'(x)$ n'est nul qu'en des points isolés de $\mathfrak{I}$** (c'est-à-dire dont l'ensemble n'est pas un intervalle), alors f est **croissante** (*resp. décroissante*) **au sens strict** sur $\mathfrak{I}$.

4. PLAN D'ÉTUDE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

L'étude d'une fonction numérique f comporte les étapes suivantes :

① Déterminer l'ensemble $\mathfrak{D}$ sur lequel il suffit d'étudier f.
En général, $\mathfrak{D}$ est une réunion d'intervalles.

On détermine $\mathfrak{D}$ en considérant, d'une part l'ensemble sur lequel f est définie, d'autre part en étudiant la périodicité et la parité (éventuelles) de f (cf. 13ᵉ leçon).

② Étude des variations.

S'il est possible de partager $\mathfrak{D}$ en intervalles dans lesquels f est continue et monotone, étudier la monotonie dans ces intervalles, c'est étudier le *sens de variation* de f.

Dans certains cas, ce sens de variation s'obtient directement, ou à l'aide des théorèmes généraux sur la variation des fonctions (cf. 13ᵉ leçon, § 6). Sinon, si la fonction est dérivable dans les intervalles de l'ensemble d'étude, et si, de plus, l'on sait étudier le signe de $f'(x)$, on peut partager l'ensemble d'étude en intervalles partiels dans lesquels $f'(x)$ garde un signe constant. Alors, d'après les théorèmes fondamentaux, ce signe détermine le sens de variation de f, dans chacun des intervalles.

❸ Les résultats obtenus sont consignés dans un tableau appelé *tableau de variation* et ainsi construit (fig. 4) :

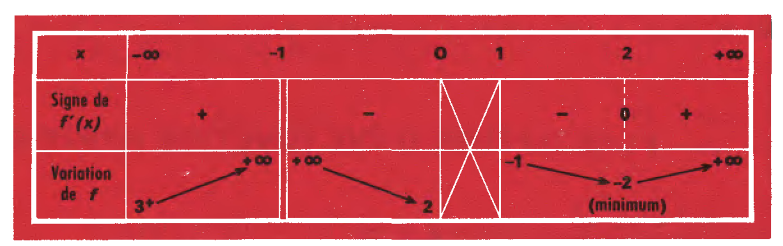
a) *Sur la première ligne* figurent les valeurs intéressantes de x :
bornes des intervalles de définition;
valeurs pour lesquelles :

- la fonction est discontinue;
- il n'y a pas dérivabilité;
- $f'(x)$ change de signe (si on fait appel à la dérivée).

b) *Sur la deuxième ligne* figure le **signe** des nombres dérivés dans les intervalles sur lesquels ils gardent un signe constant. Ces intervalles sont bornés par des nombres de la première ligne.

c) *Sur la troisième ligne*, dans chacun des intervalles, le sens de variation de la fonction est figuré par une flèche, ascendante (↗) si f est croissante, descendante (↘) si f est décroissante.

❹ On calcule, et on indique sur le tableau, dans la troisième ligne, les valeurs prises par la fonction aux bornes des intervalles. Ce problème conduit souvent à l'étude de limites.



x	−∞		−1		0		1		2		+∞
Signe de $f'(x)$		+	‖	−		X		−	0	+	
Variation de f	3⁺	↗	+∞ ‖ +∞	↘	2	X	−1	↘	−2 (minimum)	↗	+∞

Fig. 4.

❺ On illustre les divers résultats obtenus en construisant la *représentation graphique cartésienne* (L) de la fonction, ensemble des points M(x, y) tels que $y = f(x)$ (cf. fig. 5.)

Si l'intervalle d'étude a été réduit grâce à des propriétés de la fonction, il convient évidemment d'indiquer la construction complète de (L).

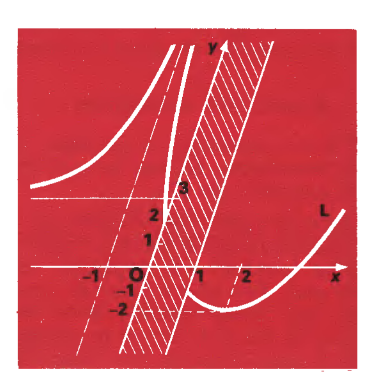


Fig. 5.

EXEMPLES D'ÉTUDE DE FONCTIONS

5. FONCTIONS TRINOMES DU SECOND DEGRÉ

Étudier la fonction f qui, à x réel, fait correspondre :
$f(x) = x^2 - x - 2$

• Définition

Quel que soit x réel, $f(x)$ est bien défini puisque nous savons : calculer le carré de x, soustraire x au résultat obtenu, puis soustraire 2.

Inversement, est-ce que tout nombre y réel est image, par f, d'un nombre réel x ? Cherchons s'il existe x tel que $x^2 - x - 2 = y$. Ceci équivaut à résoudre l'équation $x^2 - x - 2 - y = 0$, laquelle n'a de racine que si :

$$\Delta = 1 + 4(2 + y) \geqslant 0, \quad \text{soit} \quad y \geqslant -\frac{9}{4}.$$

La fonction f est donc une application de $\mathbb{R}$ sur l'ensemble $E = \left\{ y \in \mathbb{R} \,;\, y \geqslant -\frac{9}{4} \right\}$.

Notons qu'il ne s'agit pas d'une bijection de $\mathbb{R}$ sur E puisque tout élément de E, distinct de $-\frac{9}{4}$, est image de **deux** éléments de $\mathbb{R}$.

• Sens de variation.

Quel que soit x, la fonction f, somme de fonctions dérivables, est dérivable et :

$$f'(x) = 2x - 1$$

Par suite

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \iff x > \frac{1}{2} \\ f'(x) < 0 \iff x < \frac{1}{2} \\ f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

D'après le théorème admis (§ 3) nous pouvons conclure :

la fonction f est décroissante lorsque x $< \frac{1}{2}$; passe par un minimum pour x $= \frac{1}{2}$; est croissante lorsque x $> \frac{1}{2}$.

• Étude de f(x) lorsque x $\to +\infty$ ou x $\to -\infty$.

Pour $$x \neq 0, \quad f(x) = x^2 \left[1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right].$$

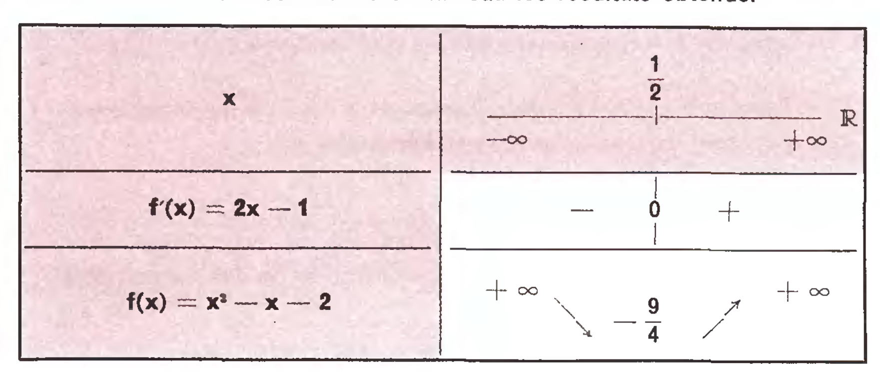
Or $$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{2}{x^2} = 0.$$

Il semble alors intuitif que $\lim\limits_{x \to \infty} \left[1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right] = 1$

et que $$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty. \end{cases}$$

• Tableau de variation.

Il est de tradition de réunir dans un tableau les résultats obtenus.



x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$ ℝ
$f'(x) = 2x - 1$		$-$	0	$+$	
$f(x) = x^3 - x - 2$	$+\infty$	↘	$-\frac{9}{4}$	↗	$+\infty$

• Représentation graphique.

Pour tracer la représentation graphique cartésienne de la fonction f, c'est-à-dire la courbe $\mathfrak{T}$ d'équation $y = x^2 - x - 2$, dans un repère cartésien xOy (fig. 6), on précise quelques points remarquables ainsi que les tangentes en ces points.

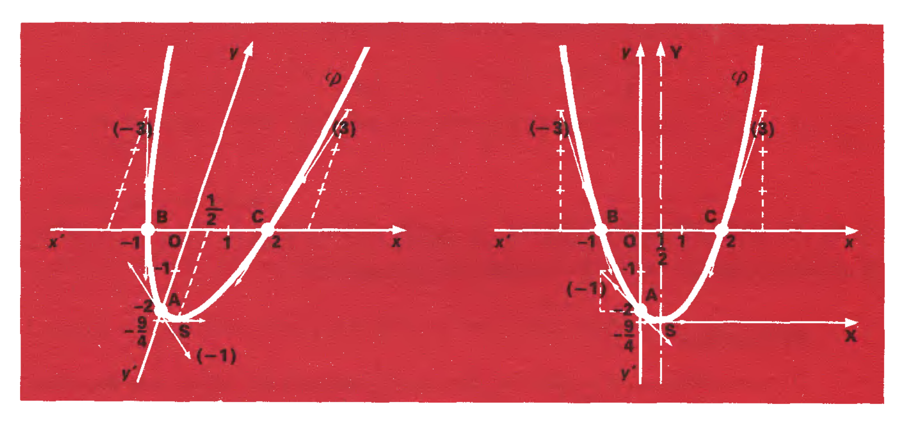


Fig. 6.

Ainsi :

Sommet S : $x = \frac{1}{2}$ $\quad y = -\frac{9}{4}$;
nombre dérivé : 0 (donc tangente parallèle à O*x*).

Point sur Oy : $x = 0 \quad f(0) = -2 \quad f'(0) = -1$
(coefficient directeur de la tangente en A).

Points sur Ox : $y = 0 \iff x^2 - x - 2 = 0$.

La courbe ($\mathcal{P}$) coupe l'axe des abscisses aux points B (−1,0) et C (2,0).

Les tangentes en ces points ont pour coefficients directeurs :

$f'(-1)$ en B, soit −3.
$f'(2)$ en C, soit 3.

• **Symétrie.**

La représentation graphique **tracée dans un système d'axes perpendiculaires** laisse pressentir **l'existence d'un axe de symétrie.**

Translatons les axes en choisissant pour nouvelle origine le sommet $S\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$. Les anciennes coordonnées (x, y) sont liées aux nouvelles (X, Y) par les formules :

$$x = \frac{1}{2} + X \quad \text{et} \quad y = -\frac{9}{4} + Y$$ (cf. Classe de 1re A, page 61).

Dans le repère XSY, la courbe ($\mathfrak{T}$) a pour équation :

$$-\frac{9}{4}+Y=\left(\frac{1}{2}+X\right)^2-\left(\frac{1}{2}+X\right)-2$$

soit $$Y = X^2$$

Ainsi, **en axes perpendiculaires,** *la courbe d'équation* $y = x^2 - x - 2$ *admet la droite d'équation* $x = \frac{1}{2}$ *comme axe de symétrie.*

REMARQUE

En **axes obliques,** la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ contient les milieux des segments parallèles à Ox et ayant leurs extrémités sur la courbe $\mathfrak{T}$.

6. FONCTIONS HOMOGRAPHIQUES

Étudier la fonction numérique f telle que $f(x) = \frac{2x}{x+1}$

• Définition

Quel que soit x réel, nous savons calculer $2x$ et $x + 1$, mais le quotient de $2x$ par $(x + 1)$ n'est pas défini si, et seulement si, $x = -1$.

Donc, la fonction f est **une application de l'ensemble** $E = \mathbb{R} - \{-1\}$ **dans** $\mathbb{R}$.

Autrement dit (2e leçon), **l'ensemble E de définition est la réunion des deux intervalles** $E_1 =]-\infty, -1[$ **et** $E_2 =]-1, +\infty[$,

soit $$E = E_1 \cup E_2$$

Réciproquement, est-ce que tout nombre réel y est image d'un élément de E ?

Posons : $$y = \frac{2x}{x+1}$$

Ce qui équivaut, dans E, à $(x + 1)y = 2x$, soit à $x(y - 2) = -y$. (1)

• **Si** $y \neq 2$, $x = \frac{y}{2-y}$

Cette valeur est différente de 1 car :

$\frac{y}{2-y} = 1 \Rightarrow x = 2 - y$ ou $0 = 2$

ce qui n'est pas.

• **Si** $y = 2$,

aucun nombre réel x n'est solution de (1).

Donc, tout nombre réel différent de 2 est image, par la fonction f, d'un seul nombre réel x ($\neq -1$).

Plus précisément :

la fonction f est une bijection de l'ensemble $\mathbf{E} = \mathbb{R} - \{-1\}$ sur l'ensemble $\mathbf{F} = \mathbb{R} - \{2\}$.

• Sens de variation.

La fonction f est dérivable, sur l'ensemble E, comme quotient de deux fonctions dérivables, celles qui, à x, font correspondre respectivement $g(x) = 2x$ et $h(x) = x + 1$.

D'après le théorème (16e leçon, § 6), la fonction dérivée f' est telle que :

$$f'(x) = \frac{(x+1)\,2 - 2x}{(x+1)^2} \qquad \text{soit} \qquad \mathbf{f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}}$$

Donc, **quel que soit $x (\neq -1)$, $f'(x) > 0$: la fonction f est croissante dans chacun des intervalles E_1 et E_2.**

• Étude de f(x) lorsque $x \to +\infty$ ou lorsque $x \to -\infty$.

Quel que soit $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{2}{1 + \dfrac{1}{x}}$.

Si $x \to \infty$, $\dfrac{1}{x} \to 0$. Par suite $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 1$ et, dans ces conditions, nous admettrons que $f(x)$ *a pour limite* 2.

Par suite :

si $x > -1$ (c'est-à-dire dans l'intervalle E_2) :

$$f(x) - 2 < 0 \quad \text{soit} \quad f(x) < 2.$$

On écrit : si $x \to +\infty$, $f(x) \to 2^-$

si $x < -1$ (c'est-à-dire dans l'intervalle E_1) :

$$f(x) - 2 > 0 \quad \text{soit} \quad f(x) > 2.$$

On écrit : si $x \to -\infty$, $f(x) \to 2^+$

• Étude de f(x) lorsque $x \to -1$.

Soit : $x = -0{,}999\,9$.

Alors : $x + 1 = 0{,}000\,1$ ou 10^{-4}.

Par suite :

$f(-0{,}999\,9) = -2 \times 0{,}999\,9 \times 10^4$

$f(-0{,}999\,9) = -19\,998$.

Soit : $x = -1{,}000\,01$.

Alors : $x + 1 = -0{,}000\,01$ ou -10^{-5}.

Par suite :

$f(-1{,}000\,01) = +2 \times 1{,}000\,01 \times 10^5$

$= 200\,002$.

De cet exemple, il semble résulter que, lorsque $x \to -1$, $f(x)$ tende soit vers $+\infty$, soit vers $-\infty$.

Cas général. Posons $x = -1 + h$, alors $f(-1 + h) = \dfrac{-2 + 2h}{h}$.

Peut-on déterminer h *pour que* f(— 1 + h) *dépasse tout nombre positif* A *donné à l'avance, donc* $\dfrac{-2 + 2\,h}{h} > A$?

D'après l'exemple traité, nous supposons $h < 0$.

Alors $-2 + 2h < Ah$, soit $h(A - 2) > -2$.

Nous pouvons toujours supposer $A - 2 > 0$ (puisque A est positif, aussi grand que l'on veut), donc $\dfrac{-2 + 2h}{h} > A$ sera réalisé dès que $h < \dfrac{-2}{A - 2}$.

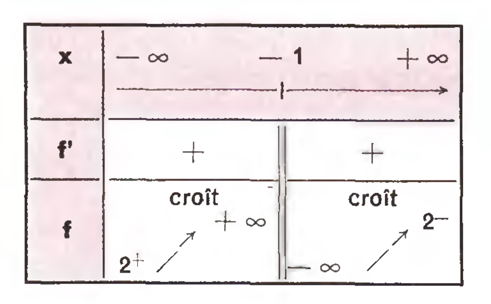
Ainsi $$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty.$$

On démontrerait de même que

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$$

● **Tableau de variation.**

Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau ci-contre.



x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'	+	‖	+
f	2^+ croît $+\infty$	‖	$-\infty$ croît 2^-

● **Représentation graphique.**

❶ La courbe (H) d'équation $y = \dfrac{2x}{x + 1}$ se construit par points et tangentes. Par exemple, nous avons construit (fig. 7) :

le point O : $x = y = 0$, $y' = 2$

le point A : $x = 1$, $y = 1$, $y' = \dfrac{1}{2}$

le point B : $x = 3$, $y = \dfrac{3}{2}$, $y' = \dfrac{1}{8}$

le point C : $x = -2$, $y = 4$, $y' = 2$.

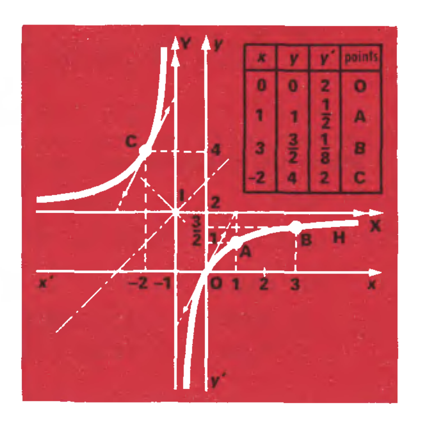


Fig. 7.

❷ Le résultat $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$ est traduit, *géométriquement*, de la façon suivante :

On dit que *la droite* IX (*fig.* 7) *d'équation* $y = 2$ *est pour* $x \to +\infty$ *une asymptote à la courbe (H).*

De même, puisque $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$, la droite IX est asymptote, pour $x \to -\infty$, à la courbe (H).

On dit aussi que la droite IY (fig. 7) est asymptote à (H) pour $x \to -1$.

- **Symétries de la courbe (H).**

❶ Il semble que le point I (— 1, 2) soit centre de symétrie pour la courbe (H). Prenons pour nouveaux axes IX et IY.

D'après un résultat obtenu (cf. Classe de 1re A, page 61), les coordonnées (x, y), dans le repère xOy, d'un point M sont liées aux coordonnées (X, Y), de ce point, dans le repère XIY, par les relations :

$$x = X - 1 \qquad y = Y + 2$$

Par suite $\quad Y + 2 = \dfrac{2(X-1)}{X} \quad$ et $\quad Y = \dfrac{2X-2}{X} - 2, \quad$ soit $\quad Y = -\dfrac{2}{X}$

La fonction g *qui, à* x *réel non nul, fait correspondre* $g(X) = -\dfrac{2}{X}$ *est impaire,* puisque $g(-X) = -g(X)$.

Par suite, *le point* I (— 1, 2) *est centre de symétrie pour la courbe* (H).

❷ Il semble (fig. 7) que les bissectrices de l'angle XIY sont axes de symétrie de la courbe (H).

Nous admettrons ce résultat.

7. FONCTIONS POLYNOMES DU 3e DEGRÉ

Étudier la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^2}{2} + x - 2$

- **Intervalle d'étude,** $\mathbb{R}$.

- **Étude aux bornes de l'intervalle.**

Pour $x \neq 0$. $\quad f(x) = x^3\left[\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}\right]$

Or $\quad \lim_{x \to \infty} \dfrac{1}{2x} = 0, \quad \lim_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2} = 0, \quad \lim_{x \to \infty} -\dfrac{2}{x^3} = 0.$

Dans ces conditions nous admettrons que :

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) = \frac{1}{6}$$

et que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

De façon plus précise $\begin{cases} \text{si } x \to +\infty, & \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty. \\ \text{si } x \to -\infty, & \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty. \end{cases}$

REMARQUE

Pour $x \to \infty$, le rapport $\frac{f(x)}{x} = x^2 \left[\frac{1}{6} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right]$ a aussi pour limite ∞.

Dans ces conditions, qui étaient déjà celles des fonctions du second degré, on dit que la courbe représentant graphiquement la fonction f **admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées.**

• Variation.

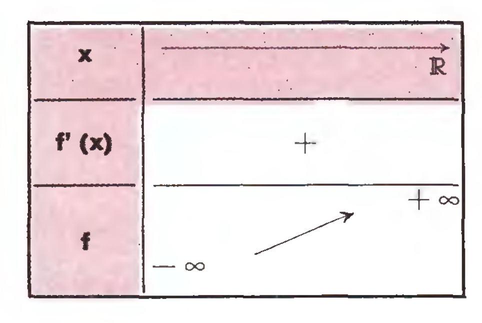
Somme de fonctions dérivables pour tout x, la fonction f est dérivable quel que soit x et :

$$\mathbf{f'(x) = \frac{x^2}{2} + x + 1}$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.
Donc *f est strictement croissante.*

• Tableau de variation.

Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau ci-dessous :



x	$\longrightarrow$ $\mathbb{R}$
f' (x)	+
f	$-\infty$ ↗ $+\infty$

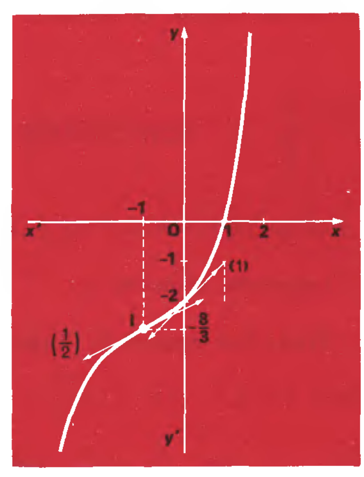


Fig. 8.

• Représentation graphique (fig. 8).

La courbe représentative de la fonction f se trace par points et tangentes.

Point sur Oy : $x = 0 \qquad y = f(0) = -2 \qquad y' = f'(0) = 1.$

Points sur Ox : $y = 0 \qquad \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x - 2 \neq 0.$

ou $\quad x^3 + 3x^2 + 6x - 12 \neq 0.$

Equation que nous ne savons pas résoudre.

• Symétrie de la courbe.

La dérivée seconde $f''(x) = x + 1$ s'annule et change de signe pour $x = -1$. Translatons les axes en choisissant pour nouvelle origine le point I :

$$\left(x = -1, \quad y = f(-1) = -\frac{8}{3}\right).$$

Les nouvelles coordonnées (X, Y) d'un point sont liées aux anciennes (x, y) par (cf. Classe de 1re A, page 61) :

$$x = X - 1 \qquad y = Y - \frac{8}{3}.$$

Par suite, l'équation de la courbe, dans le nouveau repère, est :

$$Y - \frac{8}{3} = \frac{1}{6}(X - 1)^3 + \frac{1}{2}(X - 1)^2 + (X - 1) - 2,$$

soit $\qquad Y = \frac{1}{6}X^3 + \frac{1}{2}X.$

Or la fonction g telle que $\quad g(X) = \frac{1}{6}X^3 + \frac{1}{2}X \quad$ est *impaire*.

Donc (cf. 13e leçon), le point I est **centre de symétrie.**

REMARQUE

La tangente au point I a pour coefficient directeur $f'(-1) = \frac{1}{2}$.

Au point I, **la courbe traverse sa tangente.** En effet $Y - \frac{1}{2}X = \frac{1}{6}X^3$.

Alors
- si $X > 0 \qquad Y - \frac{1}{2}X > 0$, donc la courbe est au-dessus de sa tangente ;
- si $X < 0 \qquad Y - \frac{1}{2}X < 0$, donc la courbe est au-dessous de sa tangente.

8. FONCTIONS BICARRÉES

Étudier la fonction numérique f telle que $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$

• Définition

Quel que soit le nombre réel x, nous pouvons calculer x^4, $-8x^2$ et la somme $(x^4 - 8x^2 + 7)$. La fonction f admet pour ensemble de définition, l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Inversement, *tout nombre réel y est-il, par* **f**, *image d'un nombre réel* x ?

Autrement dit, l'équation $x^4 - 8x^2 + 7 \doteq y$ a-t-elle des racines réelles. Cette équation équivaut au système :

$$\begin{cases} X^2 - 8X + 7 - y \doteq 0 & (2) \\ X \geqslant 0 \\ X = x^2 \end{cases}$$

Le discriminant (réduit) de l'équation (2) est $\Delta' = 16 - (7 - y)$ ou $\Delta' = 9 + y$. Donc, *si* $y < -9$, l'équation (2) n'a pas de racines réelles. Ceci indique que *tout nombre réel inférieur à* -9 *n'est pas l'image, par* **f**, *d'un nombre réel* x.

Supposons donc $y \geqslant -9$.

Le produit P des racines de l'équation (2) est égal à $(7 - y)$; la somme des racines à 8. Donc : si $y > 7$, le produit P est négatif et le système proposé a deux racines opposées ; si $-9 \leqslant y < 7$, le produit et la somme des racines de l'équation (2) étant positifs, cette équation a deux racines positives et **le nombre *y* est image de quatre nombres réels** (deux à deux opposés).

Donc, **la fonction *f* est une application de l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels sur l'ensemble E des nombres réels *y* tels que $y \geqslant -9$.**

REMARQUES

❶ La fonction f **n'est pas** une bijection de $\mathbb{R}$ sur E puisque les éléments de E sont images, par f, de deux, trois ou quatre nombres réels.

❷ Quel que soit x réel, $f(-x) = f(x)$.

La fonction f est paire. Il **suffit** d'étudier sa **restriction** à l'ensemble $\mathbb{R}^+$ des réels positifs (et zéro).

• Étude de f(x) lorsque $x \to +\infty$

Pour $x \neq 0$, alors $f(x) = x^4 \left[1 - \frac{8}{x^2} + \frac{7}{x^4}\right]$.

Or $0 = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{-8}{x^2} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{7}{x^4}$. Dans ces conditions nous admettrons que $\lim\limits_{x \to \infty} \left[1 - \frac{8}{x^2} + \frac{7}{x^4}\right] = 1$ et qu'alors $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$

REMARQUE

Puisque $\frac{f(x)}{x} = x^3 \left[1 - \frac{8}{x^2} + \frac{7}{x^4}\right]$, le rapport $\frac{f(x)}{x}$ tend vers l'infini lorsque $x \longrightarrow \infty$. On dit que **la courbe d'équation $y = f(x)$ admet une branche parabolique dans la direction Oy.**

• Sens de variation.

Somme de fonctions dérivables quel que soit x, la fonction f est dérivable. Sa fonction dérivée f' est telle que :

$$f'(x) = 4x^3 - 16x \quad \text{ou} \quad \mathbf{f'(x) = 4x(x^2 - 4)}$$

Par suite, et en notant que nous n'étudions f que pour $x \geqslant 0$:

$0 < x < 2 \iff f'(x) < 0 \iff$ *f décroissante*

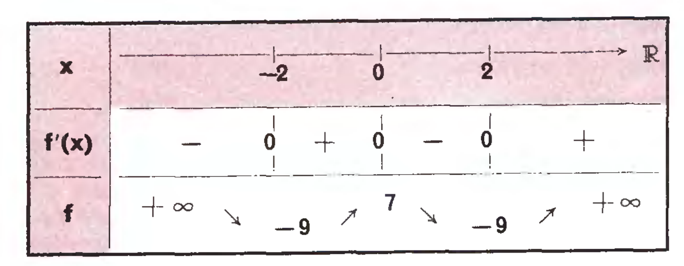
$x > 2 \iff f'(x) > 0 \iff$ *f croissante*

$x = 0 \implies f'(x) = 0$, f passe par un *maximum*

$x = 2 \implies f'(x) = 0$, f passe par un *minimum*.

Remarquons que $f(2) = -9$ et que cela confirme le résultat obtenu ci-dessus, à savoir : **seuls les nombres réels supérieurs à -9 sont images, par f, d'au moins un nombre réel.**

• Tableau de variation.



x		−2		0		2		ℝ
f'(x)	−	0	+	0	−	0	+	
f	+∞ ↘	−9	↗	7	↘	−9	↗ +∞	

Résumons dans le tableau ci-contre les résultats obtenus.

• Courbe représentative.

La courbe (C) représentant la fonction **f** se construit par points et tangentes (fig. 9).

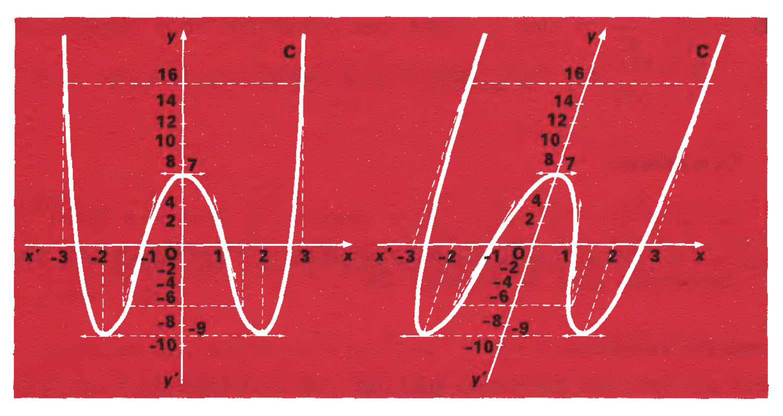


Fig. 9.

Minimum : $\begin{cases} x = +2 \\ x = -2 \end{cases}$ $\quad f(2) = -9 \quad f'(2) = 0$; $\quad f(-2) = -9 \quad f'(-2) = 0$

Maximum : $x = 0 \qquad f(0) = 7 \qquad f'(0) = 0$

Points sur Ox. Puisque $y = 0$, leurs abscisses sont les racines de l'équation $x^4 - 8x^2 + 7 \doteqdot 0$. L'équation associée $X^2 - 8X + 7 \doteqdot 0$ ayant pour racine apparente 1 (et par suite 7) on obtient :

$$\begin{cases} x = 1, & f(1) = 0, & f'(1) = -12 \\ x = -1, & f(-1) = 0, & f'(-1) = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{7}, & f(\sqrt{7}) = 0, & f'(\sqrt{7}) = 12\sqrt{7} \\ x = -\sqrt{7}, & f(-\sqrt{7}) = 0, & f'(-\sqrt{7}) = -12\sqrt{7} \end{cases}$$

Il faut noter la croissance rapide de la fonction f :

$$\begin{cases} f(2) = -9 \\ f'(2) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} f(3) = 16 \\ f'(3) = 60 \end{cases} \qquad \begin{cases} f(4) = 231 \\ f'(4) = 192 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \dots \\ \dots \end{matrix}$$

• Symétrie de la courbe (fig. 9).

Puisque, quel que soit x, $f(-x) = f(x)$, la fonction f est paire. Donc, *en axes perpendiculaires, la courbe d'équation* $y = x^4 - 8x^2 + 7$ *admet* Oy *comme axe de symétrie.*

En axes non perpendiculaires, les parallèles à Ox, d'ordonnée supérieure à -9, rencontrent (C) en des points ayant deux à deux des abscisses opposées.

9. FONCTIONS f TELLES QUE $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$

Étudier la fonction f telle que $f(x) = \dfrac{2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 5x + 7}$

- **Ensemble de définition.**

L'équation $x^2 - 5x + 7 = 0$ n'ayant pas de racines réelles, l'ensemble de départ est $\mathbb{R}$.

- **Forme canonique.**

On obtient immédiatement $f(x) - 2 = \dfrac{3x - 9}{x^2 - 5x + 7}$

soit :

$$f(x) = 2 + \frac{3x - 9}{x^2 - 5x + 7} \qquad (2)$$

- **Étude de f(x) lorsque $x \to +\infty$ ou lorsque $x \to -\infty$**

De l'expression (2), il résulte que, si l'on pose $x = \dfrac{1}{h}$:

$$f\left(\frac{1}{h}\right) = 2 + \frac{3h - 9h^2}{1 - 5h + 7h^2}$$

Et, si $h \to 0$, alors : $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 2$

Conséquence pour la courbe (C) d'équation $y = f(x)$.

La droite (Δ) d'équation $y = 2$ est asymptote à la courbe (C). De plus :

- pour $x > 3$, $\dfrac{3x - 9}{x^2 - 5x + 7} > 0$. Donc $f(x) > 2$ et la courbe (C) est au-dessus de l'asymptote (Δ).
- pour $x = 3$, $f(x) = 2$. La courbe (C) coupe l'asymptote (Δ).
- pour $x < 3$, $\dfrac{3x - 9}{x^2 - 5x + 7} < 0$. La courbe (C) est au-dessous de l'asymptote Δ.

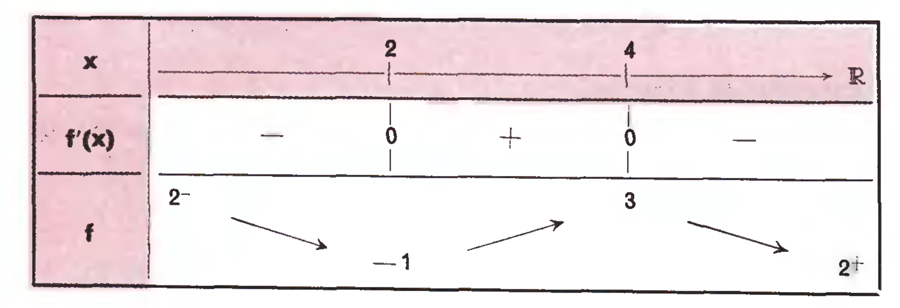
- **Variation.**

A l'aide de la forme (2), ou de la forme initiale : $f'(x) = \dfrac{-3(x^2 - 6x + 8)}{(x^2 - 5x + 7)^2}$

D'où le signe de $f'(x)$:

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \iff (x = 4 \text{ ou } x = 2). \text{ De plus } f(2) = -1 \quad \text{et} \quad f(4) = 3. \\ f'(x) > 0 \iff 2 < x < 4 \\ f'(x) < 0 \iff (x < 2 \text{ ou } x > 4). \end{cases}$$

- **Tableau de variation.**



x		2		4		$\mathbb{R}$
f'(x)	−	0	+	0	−	
f	2^- ↘	−1	↗	3	↘	2^+

- **Courbe représentative.**

La courbe (C) se construit par points et tangentes (fig. 10).

Point sur l'asymptote : $x = 3$, $y = 2$, $f'(x) = 3$.

Points d'intersection avec x'Ox : $\begin{cases} f(x) = 0 \iff \left(x = 1 \text{ ou } x = \frac{5}{2}\right). \\ \text{De plus } f'(1) = -1 \text{ et } f'\left(\frac{5}{2}\right) = 4. \end{cases}$

Régionnement du plan.

Puisque $(x^2 - 5x + 7)$ est positif quel que soit x, le signe de $f(x)$ est celui de $(2x^2 - 7x + 5)$. Il en résulte le régionnement indiqué figure 10.

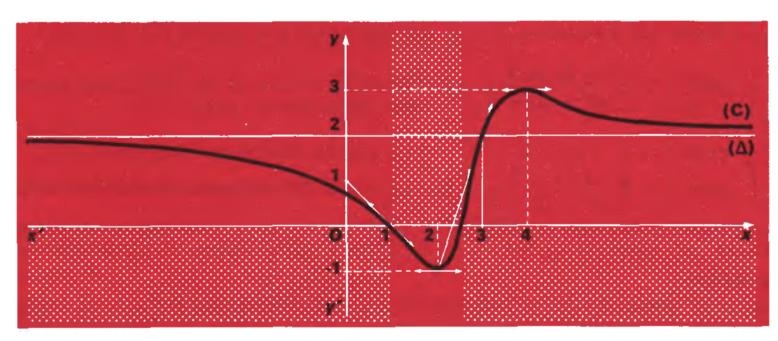


Fig. 10.

10. FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Étudier la fonction f, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, telle que : $f(x) = 2\cos^2 x + \sin 2x$

• Définition

Quel que soit x réel, $f(x)$ existe : la fonction f est une **application de l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels vers $\mathbb{R}$.**

• Périodicité.

Puisque, quel que soit x, $f(x+\pi) = f(x)$, **π est une période de la fonction.**

Pour démontrer que π est **la** période, il faut démontrer que le plus petit nombre réel strictement positif P tel que $f(x + P) = f(x)$ est π (cf. 13[e] leçon).

• Intervalle d'étude.

La fonction f n'est ni paire, ni impaire. Aucune autre symétrie n'apparaît. Nous étudierons donc la **restriction** de f au segment $[0, \pi]$.

• Sens de variation.

Nous pouvons écrire : $f(x) = 1 + \cos 2x + \sin 2x$. La fonction f est donc dérivable comme **somme** de fonctions dérivables et (cf. 15[e] leçon, § 12) :

$$\mathbf{f'(x) = -2\sin 2x + 2\cos 2x}$$

ou $$f'(x) = 2(\cos 2x - \sin 2x)$$

$$f'(x) = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$$

Donc, dans $[0, \pi]$:

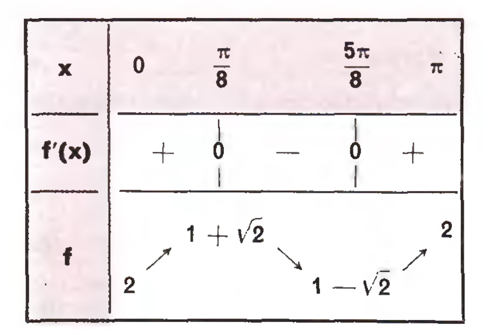
$$\begin{cases} f'(x) = 0 \iff \left(x = \frac{\pi}{8} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{8}\right) \\ f'(x) < 0 \iff \left(\frac{\pi}{8} < x < \frac{5\pi}{8}\right). \end{cases}$$

- **Tableau de variation.**

$x = 0$	$f(0) = 2$	$f'(0) = 2$	$x = \frac{\pi}{8}$	$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 + \sqrt{2}$	$f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0$ (maximum)
$x = \pi$	$f(\pi) = 2$	$f'(\pi) = 2$	$x = \frac{5\pi}{8}$	$f\left(\frac{5\pi}{8}\right) = 1 - \sqrt{2}$	$f'\left(\frac{5\pi}{8}\right) = 0$

D'où le tableau ci-dessous.

- **Représentation graphique.**



x	0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{5\pi}{8}$		π
f'(x)		+	0	—	0	+	
f	2	↗	$1 + \sqrt{2}$	↘	$1 - \sqrt{2}$	↗	2

Le tableau de variation montre que la courbe d'équation :

$$y = 2 \cos^2 x + \sin 2x$$

coupe, dans l'intervalle $]0, \pi[$, l'axe $x'Ox$ en deux points dont les abscisses sont données par le calcul suivant :

$$f(x) = 2 \cos^2 x + \sin 2x$$
$$= 2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x$$
$$f(x) = 2 \cos x (\cos x + \sin x)$$

$$\text{Dans }]0, \pi[, \quad f(x) = 0 \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

La courbe représentative (fig. 11) de la fonction f s'obtient, à partir de l'arc correspondant au segment $(0, \pi]$, par les translations de vecteur $k\pi \vec{i}$ (avec $k \in \mathbb{Z}$ et $\vec{i}$ vecteur unitaire de $x'Ox$).

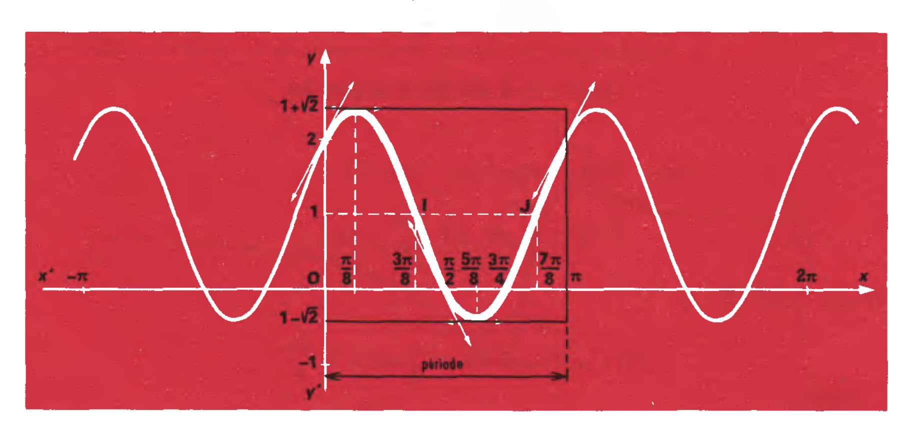


Fig. 11.



EXERCICES

Fonctions trinômes du second degré.

17-1 1° Construire la courbe (C) d'équation $y = -x^2 + 2x + 2$.

2° Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe (C) et de la droite d'équation $y = \frac{x}{2} + 1$. Construire les tangentes à (C) en ces points.

17-2 1° Construire la courbe (C) d'équation $y = x^2 - 6x + 5$.

2° Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe (C) et de la droite d'équation $2y + x + 4 = 0$. Construire les tangentes à (C) en ces points.

17-3 **Etudier les fonctions numériques f et construire les courbes représentatives :**

(1) $f(x) = |x| + x^2$

(3) $f(x) = |(x + 1)(x + 5)|$

(5) $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$

(2) $f(x) = |-x^2 + 5x| - 4$

(4) $f(x) = \sqrt{(x^2 + 2x)^2} - x^2 + 3$

(6) $f(x) = \sqrt{(x^2 - 1)^2} + 2x$

17-4 **Résoudre graphiquement les inéquations ou systèmes** (x et y réels) :

(1) $x^2 + 2y - 3x > 0$

(3) $\begin{cases} 2x + 3y - 6 < 0 \\ y < x^2 + 3x + 2 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} y < x^2 + x - 1 \\ y < x^2 - x + 1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y < x \\ y > x^2 - 1 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x^2 + x - 6 - y > 0 \\ 5x^2 - x - 4 - 2y < 0 \end{cases}$

(6) $(2x^2 - y)(x^2 - 2x + 2y - 4) < 0$

17-5 **Etant donné deux nombres réels a et b, on désigne par la notation Sup (a, b) le plus grand des deux nombres a et b. Construire dans un repère convenable les représentations graphiques des fonctions f telles que :**

(1) $f(x) = \text{Sup}\left(\frac{x}{2}, \frac{x^2}{4}\right)$

(3) $f(x) = \text{Sup}\ (x^2 - 1,\ 2x^2)$

(2) $f(x) = \text{Sup}\ (x^2 - 5x + 4,\ x - 1)$

(4) $f(x) = \text{Sup}\ (x^2 - x - 3,\ x^2 + x)$

17-6 1° Déterminer les coefficients a, b, c de façon que la courbe (C) représentant la fonction numérique f telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$ passe par les points de coordonnées :

$(x = 0,\ y = -1)$ $(x = 1,\ y = -1)$ $(x = -1,\ y = 1)$

2° Construire la courbe (C) et ses tangentes aux points donnés ci-dessus.

3° Discuter suivant les valeurs de m le nombre des points d'intersection de la courbe (C) et de la droite d'équation $y = mx - 1$.

Fonctions homographiques.

17-7 1° Etudier la fonction f de $\mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{x+2}{2x-5}$.

2° Tracer la courbe représentative (H).

3° Construire les tangentes à (H) aux points d'abscisses 1 et 2.

17-8 Mêmes questions pour $f(x) = \frac{2x-5}{x+2}$ $(x \neq -2)$.

17-9 1° Etudier la fonction f de $\mathbb{R} - \{0\}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{3x-4}{x}$.

2° Construire la courbe représentative et ses tangentes aux points d'abscisses -1 et 2.

17-10 Mêmes questions pour $f(x) = \frac{5-2x}{x}$.

Fonctions polynômes du 3e degré.

17-11 **Etudier les fonctions numériques f telles que :**
Construire les courbes représentatives de ces fonctions.

(1) $f(x) = x^3 - 3x$

(2) $f(x) = x^3 - 6x + 5$

(3) $f(x) = x^3 - 3x + 2$

(4) $f(x) = (x-2)^2(x+1)$

(5) $f(x) = x^3 + 2x - 3$

(6) $f(x) = -2x^2 + 3x + 1$

(7) $f(x) = 4x^3 - 3x$

(8) $f(x) = (x-1)(x+1)(x+2)$

17-12 1° Etudier l'application f, de l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels vers $\mathbb{R}$, telle que $f(x) = x^2 - 3x$.

2° Construire la courbe représentative (C).

3° Soit A le point d'abscisse -2 et B le point d'abscisse $\frac{3}{2}$. Quels sont les points de la courbe (C) où la tangente est parallèle à AB ?

4° Ecrire l'équation de la tangente au point M d'abscisse x_0. Discuter, suivant les valeurs de a, le nombre des tangentes passant par le point $P(x = a, y = 0)$.

17-13 1° Etudier l'application f, de l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels dans $\mathbb{R}$, telle que :

$$f(x) = -\frac{x^3}{3} + 3x.$$

2° Construire la courbe représentative (C) dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

3° Déterminer les points d'intersection de (C) et de l'axe $(O; \vec{i})$. Construire les tangentes à (C) en ces points d'intersection.

4° Soit (D_m) la droite de coefficient directeur m et passant par le point A $(x = 3, y = 0)$. Discuter, suivant les valeurs de m, le nombre des points d'intersection de la courbe (C) et de la droite (D_m).

5° Pour certaines valeurs de m, on obtient trois points d'intersection A, B, C. Exprimer, à l'aide de m, les coordonnées du milieu I du segment BC. En déduire l'ensemble des points I lorsque m varie.

17-14 Résoudre, dans $\mathbb{R}$, et discuter suivant les valeurs réelles de m, l'équation en x :

$$x^3 + 2x - 3 - m \doteqdot 0.$$

17-15 Même question pour l'équation $4x^3 - 3x - m \doteqdot 0.$

Fonctions bicarrées.

17-16 **Etudier les fonctions numériques f telles que :**

(1) $f(x) = x^4 + 3x^2 - 1$

(2) $f(x) = 2x^4 - 9x^2 + 4$

(3) $f(x) = -x^4 + 5x^2 - 4$

(4) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$

(5) $f(x) = -2x^4 + x^2 + 1$

(6) $f(x) = (x^2 - (2)1 - x^2)$

Construire les représentations graphiques de ces fonctions.

17-17 **Etudier les fonctions numériques f telles que :**

(1) $f(x) = |x^4 - x^2|$

(2) $f(x) = x^4 + |x^2 - 1|$

(3) $f(x) = |x^4 - 4x^2| + 2$

(4) $f(x) = |x^4 - 8x^2 + 7|$

Construire les représentations graphiques de ces fonctions.

17-18 **Déterminer, suivant les valeurs du nombre réel m, le nombre des racines réelles des équations satisfaisant aux conditions indiquées :**

(1) $x^4 + 3x^2 + m - 4 \doteqdot 0$ avec $-1 < x < 3.$

(2) $x^4 + x^2 - 4 + m \doteqdot 0$ avec $1 < x < 3.$

(3) $2x^4 - 9x^2 + 4 - m \doteqdot 0$ avec $-2 < x < 1.$

17-19 1° Déterminer la fonction bicarrée f telle que $f(0) = -1$; $f(1) = 1$; $f'(1) = 0.$

2° Etudier la fonction obtenue.

3° Construire, dans un repère cartésien, la courbe d'équation $y = f(x).$

17-20 Discuter, suivant les valeurs du nombre réel m, le nombre des racines réelles de l'équation $x^4 - 3x^2 + 2 - m \doteqdot 0.$ [Solution algébrique et solution graphique.]

Fonctions f telles que $\mathbf{f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}}$.

17-21 **Etudier les fonctions f et construire les courbes d'équation $\mathbf{y = f(x)}$.**

(1) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x - 1}$

(2) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x}{2x^2 - 4x + 2}$

(3) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 6x + 9}$

(4) $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1}$

(5) $f(x) = \dfrac{2x - 3}{3x^2 - 4x}$

(6) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 7x + 8}{x^2 - 3x + 2}$

17-22 1° Etudier la fonction f telle que $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$. Construire la courbe (C) d'équation $y = f(x)$.

2° En déduire la résolution du système (d'inconnue x) :

$$\begin{cases} x^2 - (m+5)\,x + 2m + 7 \doteq 0. \\ -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

17-23 1° Etudier la fonction f telle que $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1}$. Construire la courbe (C) d'équation $y = f(x)$.

2° Résoudre graphiquement l'équation, en x :

$$(2 - m)x^2 + (m+1)x - (m+1) \doteq 0.$$

Fonctions trigonométriques.

17-24 **Etudier les fonctions numériques f et construire les courbes représentatives de ces fonctions.**

(1) $f(x) = \sin\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

(2) $f(x) = \sin\left(-2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

(3) $f(x) = \sin\left(-x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

(4) $f(x) = \cos\left(3x - \dfrac{3\pi}{4}\right)$

(5) $f(x) = \cos\left(-2x + \dfrac{2\pi}{3}\right)$

(6) $f(x) = \cos\left(-x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

17-25 **Etudier les fonctions numériques f et construire leurs courbes représentatives.**

(1) $f(x) = -2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 2$

(2) $f(x) = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) + 1$

(3) $f(x) = -2\cos 3x + 1$

(4) $f(x) = 2\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) - 3$

(5) $f(x) = \sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x$

(6) $f(x) = \sin x \cdot \cos^2 x$

(7) $f(x) = \sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{3}\sin 3x$

(8) $f(x) = \cos^3 x + 3\cos x$

17-26 1° Etudier la fonction numérique f telle que $f(x) = \dfrac{1}{2\cos 2x}$.

Construire, dans un repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$ sa courbe représentative (C_1).

2° Etudier la fonction numérique g telle que $g(x) = \dfrac{\sin^2 x}{\cos 2x}$.

Construire, dans le repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative (C_2).

3° Comment (C_2) se déduit-elle simplement de (C_1) ?



INDICATIONS

17-1 2° Abscisses des points d'intersection 2 et $-\frac{1}{2}$.

17-3 (4) $f(x) = |x^2 + 2x| - x^2 + 3$.

Par suite $\begin{cases} \text{si } -2 \leqslant x \leqslant 0 & f(x) = -2x^2 - 2x + 3. \\ \text{si } x \notin \left]0\,,2\right[& f(x) = 2x + 3. \end{cases}$

Représentation graphique (fig. 12).

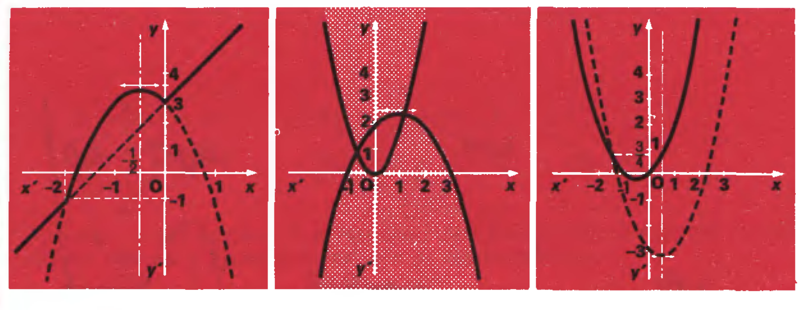


Fig. 12. Fig. 13. Fig. 14.

17-4 (6) Tracer les courbes d'équation $y = 2x^2$ et $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 2$.

Étudier suivant les régions du plan les signes de $(2x^2 - y)$ et $(x^2 - 2x - 4 + 2y)$.

La région « claire » (fig. 13) représente les couples (x, y) solutions.

17-5 (4) Tracer les courbes d'équation $y = x^2 - x - 3$ et $y = x^2 + x$. Préciser leur point commun (fig. 14).

Alors $\begin{cases} \text{si } x \leqslant -\frac{3}{2} & f(x) = x^2 - x - 3. \\ \text{si } x \geqslant -\frac{3}{2} & f(x) = \dots . \end{cases}$

17-7 Cf. fig. 15.

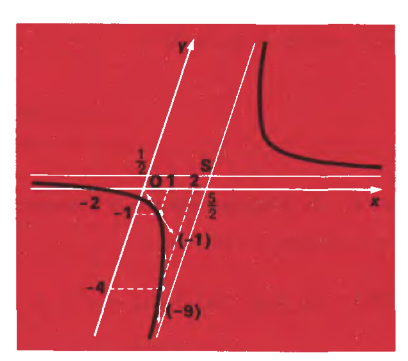


Fig. 15.

17-11 (2) fig. 16.

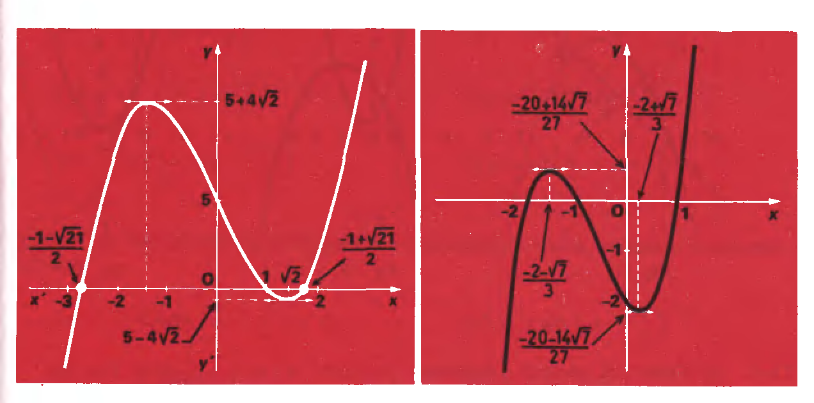


Fig. 16. Fig. 17.

(8) fig. 17.

Pour calculer les ordonnées du maximum et du minimum, on remarquera que les abscisses sont solutions de l'équation $3x^2 + 4x - 1 = 0$; on remplacera donc $3x^2$ par $(1 - 4x)$ dans $f(x)$, puis on recommencera. Il restera à remplacer x par sa valeur dans un binôme du premier degré.

17-14 Construire la courbe d'équation $y = x^3 + 2x - 3$. Chercher le *nombre* des points d'intersection avec la parallèle à l'axe des abscisses d'équation $y = m$.

17-16 (4) Fig. 18.

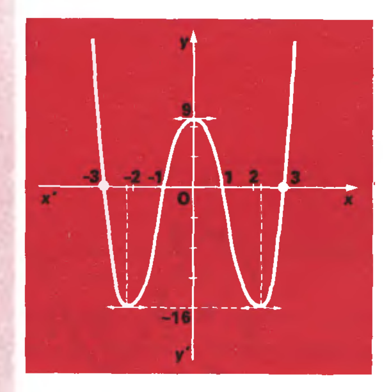


Fig. 18.

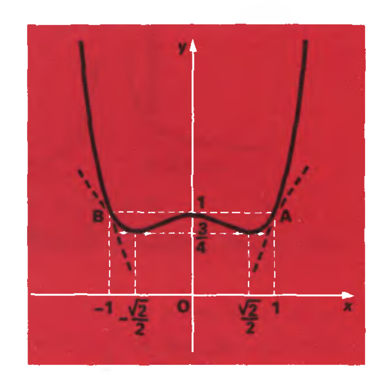


Fig. 19.

17-17 (2) si $-1 \leqslant x \leqslant 1$ $\qquad f(x) = x^4 - x^2 + 1$

si $\begin{cases} x \leqslant -1 \\ x \geqslant 1 \end{cases}$ $\qquad f(x) = x^4 + x^2 - 1$ $\qquad$ (fig. 19).

Attention : aux points A et B, la fonction f n'est pas dérivable. Il y a cependant dérivabilité à droite et à gauche (construire les demi-tangentes...).

17-18 (1)

Construire l'arc $\begin{cases} y = -x^4 - 3x^2 + 4 \\ -1 < x < 3 \end{cases}$ sur la courbe (C) d'équation :

$$y = -x^4 - 3x^2 + 4.$$

Préciser, lorsque m varie, les abscisses des points d'intersection de (C) avec la droite, parallèle à $x'Ox$, d'équation $y = m$.

(2) (3) Méthode analogue.

17-20 *Solution graphique :* méthode analogue à celles du 17-14.

Solution algébrique : on étudiera l'*existence* et le *signe* des racines de l'équation résolvante $u^2 - 3u + 2 - m \neq 0$.

17-21 (6) Fig. 20.

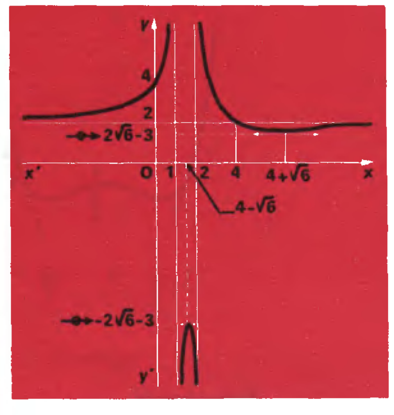


Fig. 20.

Fig. 21.

17-24 (2) *Période* π.

Si A est le point $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$, la translation de l'origine des axes en ce point, montre que A est centre de symétrie de la courbe représentative. Donc *étude* sur $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right]$ (fig. 21).

17-25 (7) *Période :* 2π. *Fonction impaire. Intervalle d'étude* $[0, \pi[$

$$f'(x) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$$
$$= 2 \cos 2x \cos x + \cos 2x = \cos 2x\,(2 \cos x + 1).$$

$$f'(x) = 0 \iff \begin{cases} \cos 2x = 0 \quad \ldots\ldots \\ \cos x = -\frac{1}{2} \quad \ldots\ldots \end{cases}$$

17-26 3° $\forall x \quad f(x) - g(x) = \frac{1}{2}$.

Donc (C_2) se déduit de (C_1) par la translation de vecteur $-\frac{1}{2}\vec{j}$.

PRIMITIVES D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

18

● *Nous abordons ici le problème* **réciproque** *de la dérivation, étudiée dans la 14*e *leçon, à savoir :*

— *connaissant une fonction numérique* f, *définie sur un intervalle* $\mathcal{I}$, **chercher s'il existe** *une fonction numérique* F, *définie sur* $\mathcal{I}$ *et admettant* f *comme fonction dérivée ;*

— *dans l'affirmative,* **déterminer** F.

1. DÉFINITION D'UNE FONCTION PRIMITIVE



Si, sur un intervalle $\mathcal{I}$, une fonction numérique F admet pour fonction dérivée la fonction f, alors F est appelée fonction primitive de f sur l'intervalle $\mathcal{I}$. On dit, plus simplement, que F est une primitive de f.

F, primitive de f, sur $\mathcal{I}$ équivaut à $\forall x \in \mathcal{I}, \quad F'(x) = f(x)$

EXEMPLES

❶ **La fonction F telle que F(x)** $= x^3$ admet pour fonction dérivée, sur $\mathbb{R}$, la fonction f telle que $f(x) = 3x^2$.

Donc, sur $\mathbb{R}$, la fonction f admet pour primitive la fonction F.

❷ La fonction **sinus** admet pour fonction dérivée, sur $\mathbb{R}$, la fonction **cosinus.** Donc, sur $\mathbb{R}$, la fonction **cosinus** admet pour primitive la fonction **sinus.**

CONTRE-EXEMPLE

La fonction f de [1, 3] vers $\mathbb{R}$, telle que f(2) = 4 et, pour $x \neq 2$, f(x) = 0 admet-elle une primitive F ?

S'il en est ainsi, F est continue sur [1, 3] puisque dérivable. Or sur [1, 2[et]2, 3], $F'(x) = f(x) = 0$. Par suite F est constante sur [1, 2[et]2, 3]. Or F étant continue sur [1, 3], alors F serait constante sur [1, 3]. Par suite $\forall x \in [1, 3] \quad F'(x) = 0$.

Il y a contradiction puisque $F'(2) = f(2) \neq 0$. **La fonction f n'admet** pas de primitives.

2. PRIMITIVES D'UNE FONCTION

1 Si F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $\mathfrak{I}$ et si k est une fonction constante quelconque, alors la fonction :

$$G = F + k$$

est telle que, pour tout $x \in \mathfrak{I}$:

$$G'(x) = F'(x) + 0 = f(x) \quad \text{[par définition de F]}$$

La fonction G est donc une *autre primitive* de la fonction f.

2 **Réciproquement,** si F et G sont deux primitives de la même fonction f sur l'intervalle $\mathfrak{I}$, la fonction $\Phi = G - F$, différence de deux fonctions dérivables sur $\mathfrak{I}$, est dérivable sur $\mathfrak{I}$ (cf. 16ᵉ leçon) et, pour tout $x \in \mathfrak{I}$:

$$\Phi'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

La fonction Φ est donc une fonction constante sur $\mathfrak{I}$ (cf. 17ᵉ leçon) ; il existe un nombre réel k tel que, pour tout $x \in \mathfrak{I}$:

$$G(x) = F(x) + k.$$

D'où l'énoncé :

• THÉORÈME



Si une fonction f admet une fonction primitive F sur un intervalle $\mathfrak{I}$, elle en admet une infinité ; ce sont les fonctions G = F + k, k étant une fonction constante arbitraire :

$$G' = F' \iff G = F + k$$

Ainsi, il suffit de connaître une primitive de la fonction f pour les déterminer toutes.

EXEMPLE

La fonction f telle que $f(x) = 3x^2$ admet pour primitive, sur $\mathbb{R}$, la fonction F telle que $F(x) = x^3$.

Toute fonction G telle que $G(x) = x^3 + k$ (avec $k \in \mathbb{R}$) est une primitive, sur $\mathbb{R}$, de la fonction f.

3. PRIMITIVE PRENANT UNE VALEUR DONNÉE POUR x_0

● Soit F une primitive de la fonction f sur l'intervalle $\mathfrak{I}$.
Pour qu'une primitive $G = F + k$ prenne, en un point x_0 de l'intervalle $\mathfrak{I}$, une valeur *donnée* b, il faut et il suffit que :

$$G(x_0) = F(x_0) + k = b,$$

c'est-à-dire que :

$$k = b - F(x_0).$$

La primitive G est donc déterminée de manière unique par $\mathbf{G = F + b - F(x_0)}$.
D'où l'énoncé :

● **PROPRIÉTÉ**

Il existe une seule primitive de la fonction f qui, au point x_0, prenne une valeur donnée b.



EXEMPLE

Soit à définir la primitive G de f, telle que $f(x) = 4x^3$, qui prend la valeur 10 pour $x = 2$,

Posons $G = F + k$ avec : $F(x) = x^4$.

Alors $G(2) = F(2) + k$ soit : $10 = 2^4 + k$, d'où $k = -6$.

Donc $\mathbf{G(x) = x^4 - 6}$.

● **REMARQUE**

On cherche souvent la primitive qui s'*annule* pour x_0.
Par suite $b = 0$, donc $\mathbf{G(x) = F(x) - F(x_0)}$.

4. RECHERCHE DE QUELQUES PRIMITIVES

● En raison de leur définition, la connaissance de fonctions primitives F résulte d'un *recensement* des fonctions f obtenues comme dérivées des fonctions F, ainsi que des propriétés suivantes :

Si les fonctions **f** *et* **g** *admettent respectivement pour primitives, sur un intervalle* $\mathfrak{I}$, *les fonctions* F *et* G, *alors la fonction* **f + g** *admet sur l'intervalle* $\mathfrak{I}$ *la fonction primitive* F + G.

En effet, la dérivée de la fonction F + G est la fonction : $F' + G' = \mathbf{f + g}$ (16e leçon, § 2).

Si la fonction **f** *admet pour primitive, sur l'intervalle* $\mathfrak{I}$, *la fonction* F *et si* k *est une constante arbitraire, alors la fonction* k. **f** *admet sur l'intervalle* $\mathfrak{I}$ *la fonction primitive* k. F.

En effet, la dérivée de la fonction kF est la fonction : $kF' = k\,\mathbf{f}$ (16e leçon, § 3).

• Tableau des primitives algébriques usuelles :

Intervalle de définition	Fonction f $f(x) =$	Fonction primitive F $F(x) =$	En effet :
$\mathbb{R}$	0	C (constante)	$F(x) = C$; $F'(x) = 0$
$\mathbb{R}$	a	$ax + k$	$(ax + k)' = a$
$\mathbb{R}$	x^n (n entier naturel)	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + k$	$\left(\frac{1}{n+1} x^{n+1} + k\right)' = \frac{n+1}{n+1} x^{n+1-1} = x^n$
$\mathbb{R} - \{0\}$	$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + k$	$\left(-\frac{1}{x} + k\right)' = -\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}$
$\mathbb{R}^+ - \{0\}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$	$(2\sqrt{x} + k)' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

REMARQUE

La fonction f de $\mathbb{R} - \{0\}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{1}{x}$ n'a pas été rencontrée comme fonction dérivée ; nous ne lui connaissons donc pas de fonction primitive. Nous reprendrons cette question dans la 20ᵉ leçon.

• Fonctions circulaires.

Rappelons les résultats obtenus dans la 15ᵉ leçon :

si $\varphi(x) = \sin x$	$\varphi'(x) = \cos x$
si $\varphi(x) = \cos x$	$\varphi'(x) = -\sin x$
si $\varphi(x) = \operatorname{tg} x$ [avec $x \neq \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$]	$\varphi'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
si $\varphi(x) = \operatorname{cotg} x$ [avec $x \neq 0 \pmod{\pi}$]	$\varphi'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

D'où le tableau des primitives usuelles :

Intervalle de définition	Fonction f $f(x) =$	Fonction primitive F $F(x) =$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x + k$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$-\cos x + k$
$\left](2k-1)\frac{\pi}{2},\ (2k+1)\frac{\pi}{2}\right[$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$\operatorname{tg} x + k$
$]k\pi,\ (k+1)\pi[\ \ (k \in \mathbb{Z})$	$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{cotg}^2 x$	$-\operatorname{cotg} x + k$

5. RECHERCHE DE PRIMITIVES

La définition du nombre dérivé d'une fonction (cf. 14ᵉ leçon) permet de montrer l'existence de ce nombre et de le calculer directement (par recherche d'une limite, lorsqu'elle existe).

De plus, si des fonctions **u**, **v** ont pour fonctions dérivées **u'** et **v'**, les fonctions **uv** et $\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{v}}$ (pour $v(x) \neq 0$) ont des fonctions dérivées que l'on sait exprimer. Au contraire la définition d'une fonction primitive F, pour une fonction f, ne fournit aucun moyen de construire une telle fonction F, ni d'établir son existence. Pour déterminer les primitives de f et établir qu'elles existent, nous ne disposons donc, à ce niveau, que du moyen consistant à **reconnaître**, dans une fonction f, une fonction dérivée d'une fonction F, ce qui nécessite une très bonne connaissance de la dérivation et des propriétés de la formation des primitives (§ 4).

Mais cela ne permet de résoudre le problème posé que dans un nombre réduit de cas. En particulier, connaissant des primitives F et G des fonctions **f** et **g**, on ne sait pas exprimer une primitive de la fonction **f . g**, ou de la fonction $\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}}$; on ignore même s'il en existe.

Donnons des exemples fondamentaux de détermination de primitives, obtenus en combinant les résultats des paragraphes 3 et 4. Dans tous ces exemples, k désigne une constante arbitraire.

• Primitives d'une fonction polynome.

La fonction polynome f, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, telle que :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

admet comme primitives les fonctions polynomes F telles que :

$$F(x) = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \dots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x + k.$$

• Primitives de fonctions circulaires.

Soit $(ax + b)$ la mesure d'un arc en radians.

— La fonction f telle que $f(x) = \cos(ax + b)$ a pour primitives les fonctions F telles que : $F(x) = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + k.$

— La fonction f telle que $f(x) = \sin(ax + b)$ a pour primitives les fonctions F telles que : $F(x) = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + k.$

— La fonction f telle que $f(x) = 1 + tg^2(ax + b) = \frac{1}{\cos^2(ax + b)}$ a pour primitives les fonctions F telles que : $F(x) = \frac{1}{a} \text{tg}(ax + b) + k.$



18-1 Soit $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1.$

Définir la primitive de f qui prend la valeur 4 pour $x = 1$.

18-2 Même question pour $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + x - 2.$

18-3 Soit $f(x) = 1 + \sqrt{x^2}$. Quelle est la primitive de f qui prend la valeur 1 pour $x = 0$?

18-4 Soit f l'application de $[0, 6]$ vers $\mathbb{R}$ ainsi définie :

si $x \in [0, 1[$ $f(x) = 0$; si $x \in [1, 2[$ $f(x) = 1$;
si $x \in [2, 3[$ $f(x) = 2$; si $x \in [3, 4[$ $f(x) = 3$;
si $x \in [4, 5[$ $f(x) = 4$; si $x \in [5, 6[$ $f(x) = 5$;
si $x = 6$ $f(6) = 6$.

1° Représenter graphiquement f.

2° Existe-t-il une primitive F de f, telle que $F(0) = 0$?

8-5 Soit E l'application, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{Z}$, « ... partie entière de... ».

1° Existe-t-il une primitive de E qui s'annule pour $x = 0$?

2° Existe-t-il des primitives de E ?

18-6 Déterminer les primitives F des fonctions f telles que :

(1) $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + 1$

(3) $f(x) = \cos 2x$

(4) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$

(5) $f(x) = \cos^2 x$

(6) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2}$

18-7 Soit f l'application de $[0, 3]$ vers $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \text{si } x \in [0, 1] \quad f(x) = 0 ; \qquad \text{si } x \in [1, 2] \quad f(x) = 2x - 2 \\ \text{si } x \in [2, 3] \quad f(x) = x. \end{cases}$$

1° Représenter graphiquement la fonction f.

2° Déterminer les primitives de f.

18-8 1° Etudier la fonction f qui, à $x \in [-3, 5]$, fait correspondre :

$$f(x) = |x - 1| + |x| + |2x + 2|.$$

2° Représenter graphiquement f.

3° Déterminer la primitive F de f telle que $F(0) = 1$.

18-9 Mêmes questions pour $f(x) = |2x - 1| + |x - 2|$.

INDICATIONS

18-1 Les primitives de f sont telles que $F(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} + x^2 - x + k$.

Alors $F(1) = 4 \implies 4 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3} + 1 - 1 + k$, soit $k = \dfrac{49}{12}$.

Donc la primitive F_1 demandée est telle que $F_1(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} + x^2 - x + \dfrac{49}{12}$.

18-4 2° Si F existe :

a) alors pour $x \in [0, 1[$, $F(x) = k$.

Puisque $F(0) = 0$ alors $k = 0$. Donc $\forall x \in [0, 1[$ $f(x) = 0$.

b) pour $x \in [1, 2[$; F, primitive de f, est telle que $F(x) = x + k_1$.

Or F doit être continue, donc $F(1) = 0$ c'est-à-dire $k_1 = -1$.

Alors $\begin{cases} \text{si } x \in [0, 1[& F(x) = 0 \\ \text{si } x \in [1, 2[& F(x) = x - 1. \end{cases}$

Mais F n'est pas dérivable en point 1. Donc f n'a pas de primitive.

18-6 (4) $f(x) = (1 + \text{tg}^2\, x) - 1 \implies F(x) = \text{tg}\, x - x$.

(6) $f(x) = x - 2 + \dfrac{1}{x^2}$.

18-8 1° $\begin{cases} \text{si } x \in [-3, -1] & f(x) = -4x - 1 \\ \text{si } x \in [-1, 0] & f(x) = 3 \\ \text{si } x \in [0, 1] & f(x) = 2x + 3 \\ \text{si } x \in [1, 5] & f(x) = 4x + 1. \end{cases}$

AIRES DE DOMAINES PLANS



● *Dans l'ensemble des fonctions numériques définies sur un intervalle, nous avons pu caractériser (cf.* 14ᵉ *leçon) le sous-ensemble des fonctions* **dérivables.**

● *Or (cf. leçon précédente), l'étude du problème réciproque, à savoir : caractériser l'ensemble des fonctions numériques admettant une primitive, n'a pas abouti car la définition d'une fonction primitive n'a permis, ni d'établir son existence, ni de fournir un moyen de construire cette fonction.*

● *Nous avons donc été réduits à :*

— *constater qu'il existe des fonctions n'admettant pas de fonction primitive ;*

— *démontrer des propriétés des fonctions primitives,* **leur existence étant admise ;**

— *construire, dans des cas très particuliers, de telles fonctions.*

● *Le problème mathématique posé serait donc à reprendre. Mais à partir de quelles bases ?*

Dans cette leçon, admettant la notion d'aire d'un domaine plan comme « intuitive », nous allons constater, sur des exemples, qu'il existe un lien entre les notions d'aire et de primitive.

● *Cette constatation étant faite, nous démontrerons, pour les fonctions continues et monotones sur un intervalle, le théorème fondamental entre les notions de primitives et d'aires.*

● *Nous appliquerons enfin ce théorème, à des calculs d'aires planes.*

1. EXEMPLES

● PREMIER EXEMPLE

Soit f l'application du segment [1, X] telle que, quel que soit $t \in [1, X]$, avec $X \geqslant 1$, $f(t) = 2$.

Dans le repère orthonormé xOy, *l'aire du rectangle* ABCD (*fig.* 1) (*en admettant comme intuitive la notion d'aire*) *est* $2(X - 1)$. *Or la fonction* F *qui, à* $x \geqslant 1$ *fait correspondre* $F(x) = 2(x - 1)$ *est* **la primitive, s'annulant pour $x = 1$, de la fonction f.**

Donc (cf. leçon précédente, § 3), si φ est une primitive quelconque de *f*, alors

$$\textbf{aire ABCD} = \varphi(X) - \varphi(1) .$$

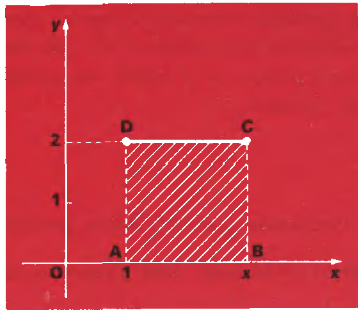


Fig. 1.

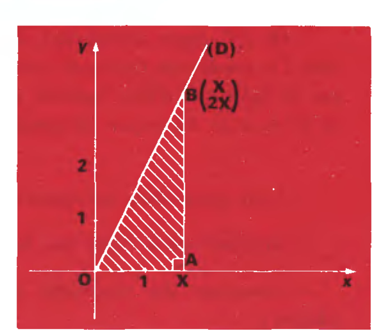


Fig. 2.

● DEUXIÈME EXEMPLE

Soit *f* l'application telle que, quel que soit *x* strictement positif $f(x) = 2x$.

Soit D la droite d'équation $y = 2x$.

Dans le repère orthonormé *xOy*, l'aire du triangle rectangle OAB (fig. 2) est

$$\frac{OA \times AB}{2} \quad \text{soit} \quad \frac{X \times 2X}{2} \quad \text{ou} \quad X^2.$$



Or la fonction F qui $x \geqslant 0$, fait correspondre $F(x) = x^2$ est une **primitive** de *f* : c'est **la primitive s'annulant pour $x = 0$.**

Et si φ est une primitive quelconque de *f*, alors : (cf. 18[e] leçon, § 3). **aire OAB** $= \varphi(X) - \varphi(0)$

● TROISIÈME EXEMPLE

Soit f la fonction telle que, que quel soit $x \geqslant 1$, $f(x) = 2x - 1$.

Soit ABCD, le domaine trapézoïdal défini par $1 \leqslant x \leqslant X$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$ (fig. 3).

Dans le repère orthonormé xOy, l'aire du trapèze ABCD *est* :

$$\frac{AB(AD) + BC)}{2} \text{ soit } (X - 1)X \text{ ou } X^2 - X.$$

Or la fonction F *qui, à* $x \geqslant 1$ *fait correspondre* $F(x) = x^2 - x$, *est la* **primitive (de la fonction f) prenant la valeur zéro pour $x = 1$.**

Donc (cf. 18e leçon, § 3), si φ est une primitive de f :

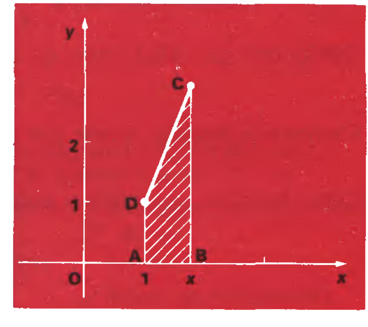


Fig. 3.

aire ABCD $= \varphi(X) - \varphi(1)$.

2. THÉORÈME FONDAMENTAL



● Si f est une fonction continue et monotone sur [a, X], si f(x) est positif sur [a, X], alors l'aire $\mathcal{A}(X)$ du domaine plan défini dans un repère orthonormé par $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant X \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$ est, en désignant par F une primitive de f : $\mathcal{A}(X) = F(X) - F(a)$

Puisque f est monotone, nous la supposerons croissante (ce qui ne restreint pas la généralité).

Avec les hypothèses indiquées, le théorème signifie que :

1. la dérivée de $\mathcal{A}$ est f.
2. $\mathcal{A}(x)$ est la primitive de f, qui s'annule pour $x = a$ (cf. 18e leçon, § 3).

D'où une démonstration en deux parties.

PREMIÈRE PARTIE : La dérivée de $\mathcal{A}$ est f.

Soit (C) la courbe d'équation $y = f(x)$ (fig. 4).
Soit Am_0M_0B le domaine plan défini par $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant x_0 \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x). \end{cases}$

Désignons par $\mathcal{A}(x_0)$ l'aire du domaine plan Am_0M_0B.

Etudions la fonction $\mathcal{A}$ telle que : $x_0 \xrightarrow{\mathcal{A}} \mathcal{A}(x_0)$.

Cette fonction est définie quel que soit $x_0 \in [a, X]$.

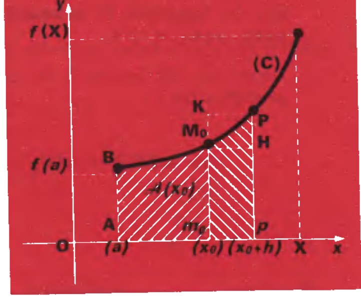


Fig. 4.

● *Dérivabilité du point* x_0.

Par définition $\mathcal{A}(x_0 + h)$ est l'aire du domaine $ApPB$ (fig. 4), en admettant la notion d'aire.

Par suite l'aire de m_0pPM_0 est :

$$|\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)|$$

Or *f est supposée croissante*, donc :

$$\begin{cases} \text{si } h \geqslant 0 & \text{aire } m_0p\,PM_0 = \mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0) \\ \text{si } h \leqslant 0 & \text{aire } m_0p\,PM_0 = \mathcal{A}(x_0) - \mathcal{A}(x_0 + h). \end{cases}$$

Or, intuitivement :

Aire $m_0p\,HM_0 \leqslant$ aire $m_0p\,PM_0 \leqslant$ aire $m_0p\,PK$

C'est-à-dire, puisque : $m_0p = |h|$, $m_0p = f(x_0)$ et $pP = f(x_0 + h)$

$$\begin{cases} \text{si } h \geqslant 0 & h \cdot f(x_0) \leqslant \mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0) \leqslant h \cdot f(x_0 + h) \\ \text{si } h \leqslant 0 & (-h) \cdot f(x_0 + h) \leqslant \mathcal{A}(x_0) - \mathcal{A}(x_0 + h) \leqslant (-h) \cdot f(x_0) \end{cases}$$

Par suite, dans les deux cas :

$$f(x_0) \leqslant \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \leqslant f(x_0 + h)$$

Puisque *f est continue*, $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$.

Donc : $$\lim_{h \to 0} \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} = f(x_0).$$

C'est dire que *le nombre dérivé, pour la valeur* x_0, *de la fonction* $\mathcal{A}$ *est* $f(x_0)$.

● **Fonction dérivée.**

Le résultat obtenu est valable quel que soit $x_0 \in [a, X]$.

Donc : **la fonction f est, sur [a, X], la dérivée de la fonction $\mathcal{A}$**
ou : **la fonction $\mathcal{A}$ est une primitive de f.**

■ DEUXIÈME PARTIE : $\mathcal{A}(X) = F(X) - F(a)$

Si $x_0 = a$, il est clair que l'aire du domaine (le segment [A, B]) est nulle.
Par suite $\mathcal{A}$ **est la primitive de f, qui prend la valeur 0 pour X = a.**

D'après le résultat démontré (18ᵉ leçon, § 3), si F est une primitive de f, alors

$$\mathcal{A}(X) = F(X) - F(a)$$

ce que l'on note aussi $$\mathcal{A}(X) = [F(x)]_a^X$$

REMARQUES

❶ L'aire $\mathcal{A}(X)$ définie ci-dessus est notée $\mathcal{A}(X) = \int_a^X f(x)\,dx$ ce qui se lit « $\mathcal{A}$ *de* X *égale somme de* a *à* X, *de* f(x)dx ».

❷ Le théorème ci-dessus supposait réalisées les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} f \text{ continue et } \textit{monotone} ; \\ f(x) \geqslant 0 ; \\ a \leqslant X. \end{cases}$$

Nous allons chercher à nous affranchir de certaines de ces hypothèses.

❸ Le théorème fondamental ci-dessus justifie les résultats obtenus dans les exemples traités (§ 1).

■ 3. EXTENSION DU THÉORÈME FONDAMENTAL

P₁ *Le théorème fondamental est vrai si* f *est continue sur* [a, X] *et monotone par intervalle.*

En effet, soit (C) la courbe d'équation $y = f(x)$ (fig. 5).

Supposons :

$f(x) \geqslant 0$; $a \leqslant X$; f continue sur [a, X] et *monotone par intervalle sur* [a, X].

Supposons, par exemple, que f soit croissante sur $[a, \alpha]$, décroissante sur $[\alpha, \beta]$, croissante sur $[\beta, X]$. L'aire du domaine plan ABCD défini par

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant X \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$$

est la somme des aires des domaines AEFB, EGHF, GCDH.

Soit F une primitive de f. D'après le théorème fondamental :

aire AEFB $= F(\alpha) - F(a)$; aire EGHF $= F(\beta) - F(\alpha)$; aire GCDH $= F(X) - F(\beta)$

Donc :

$$\text{aire ABCD} = [F(\alpha) - F(a)] + [F(\beta) - F(\alpha)] + [F(X) - F(\beta)]$$

$$\textbf{aire ABCD} = F(X) - F(a)$$

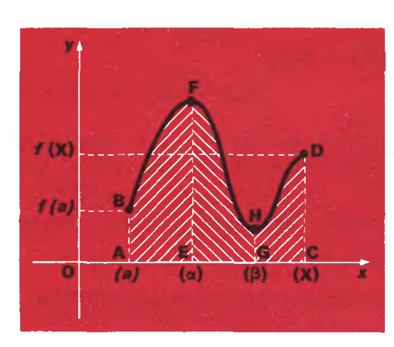


Fig. 5.

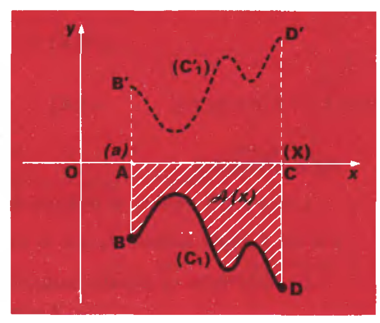


Fig. 6.

P₂ *Si* f *est continue sur* [a, X] *et monotone par intervalle sur* [a, X], *si* $f(x) \leqslant 0$, *alors l'aire* $\mathcal{A}(X)$ *du domaine plan, défini en repère orthonormé par* $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant X \\ f(x) \leqslant y \leqslant 0, \end{cases}$ *est telle que* $\mathcal{A}(x) = \left|F(x) - F(a)\right|$, *en désignant par* F *une primitive de* f.

Soit (C_1) la courbe d'équation $y = f(x)$ et (C'_1) celle d'équation $y = -f(x)$ (fig. 6).

Si F est une primitive de f, alors $(-F)$ est une primitive de $(-f)$ et l'aire $\mathcal{A}_1(X)$ du domaine ACD′B′ est, d'après **P₁** : $\mathcal{A}_1(X) = -F(X) + F(a) = -[F(X) - F(a)]$.

Si $\mathcal{A}(X)$ est l'aire du domaine ACDB, symétrique de ACD′B′ par rapport à Ox, nous conviendrons d'admettre que $|\mathcal{A}(X)| = \mathcal{A}_1(X)$. Donc :

$$\mathcal{A}(X) = \left|F(x) - F(a)\right|.$$

REMARQUES

❶ Le nombre *négatif* $\mathcal{A}(x) = F(x) - F(a)$ s'appelle *l'aire algébrique* du domaine ACDB. Le réel positif $|\mathcal{A}(x)|$ est l'*aire arithmétique* du même domaine.

❷ Supposons f continue sur $[a, X]$ et monotone par intervalles. Supposons de plus que $X \leqslant a$ et $f(x) \geqslant 0$ (fig. 7).

Alors, d'après **P₁** l'aire $\mathcal{A}(X)$ du domaine ACBD est, en désignant par F une primitive de f :

$$\mathcal{A}(X) = F(a) - F(X).$$

Le réel négatif $F(X) - F(a)$ s'appelle encore l'*aire algébrique* du domaine ACBD.

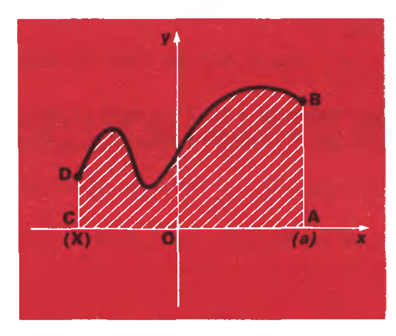


Fig. 7.

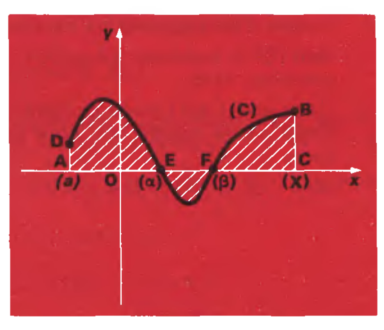


Fig. 8.

❸ Soit f une fonction continue sur $[a, X]$ et monotone par intervalles.

Supposons que sur $\begin{cases} [a, \alpha] \cup [\beta, X], & f(x) \geqslant 0 \\ [\alpha, \beta], & f(x) \leqslant 0 \end{cases}$ (fig. 8).

L'aire *arithmétique* $\mathcal{A}$ du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites AD et CB est :

$$\mathcal{A} = \text{aire ADE} + \text{aire EHF} + \text{aire FBC}.$$

Et d'après **P₁** et **P₂**, si F est une primitive de f :

$$\mathcal{A} = F(\alpha) - F(a) + |F(\beta) - F(\alpha)| + F(X) - F(\beta).$$

Soit : $$\mathcal{A} = F(X) + 2\,F(\alpha) - 2\,F(\beta) - F(a).$$

Autrement dit, le réel $F(X) - F(a)$ n'est pas l'aire arithmétique du domaine considéré.

On dit, par définition, que c'est *l'aire algébrique* de ce domaine.

Dans le cas ci-dessus :

$$F(X) - F(a) = \text{aire ADE} - \text{aire EFH} + \text{aire FCB}.$$

Ce qui conduit à poser la définition suivante :

● DÉFINITION

Si F est une primitive de f, l'aire algébrique du domaine plan limité par l'axe x′Ox, la courbe d'équation y = f(x) et les droites d'équation x = a et x = X est, en axes orthonormés, égale à $\mathcal{A}(X) = F(X) - F(a)$.

4. CALCUL D'AIRES DE DOMAINES PLANS

● Les résultats ci-dessus permettent de calculer les aires de certains domaines plans. Donnons quelques exemples :

• **Aire d'un segment de parabole** (fig. 9).

Soit (C) la parabole d'équation $y = x^2$. Soit à calculer l'aire du segment de parabole AOB.

Cette aire $\mathcal{A}$ est l'excès de l'aire $\mathcal{A}_1$ du rectangle ABCD sur celle $\mathcal{A}_2$ du domaine limité par la courbe (C), l'axe $x'Ox$ et les droites d'équation $x = \alpha$ et $x = -\alpha$ (avec $\alpha > 0$).

Or : $\mathcal{A}_1 = \text{CD} \times \text{DA} = 2\alpha \times \alpha^2$ $\quad \mathcal{A}_1 = 2\,\alpha^3$.

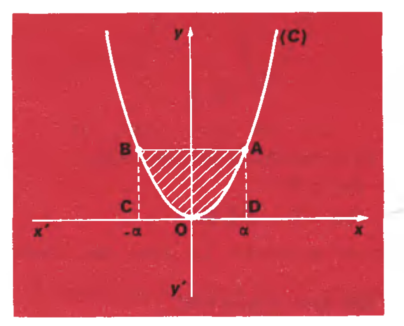


Fig. 9.

Fig. 10.

D'autre part, $\dfrac{x^3}{3}$ est une primitive de la fonction f telle que $f(x) = x^2$.

Par suite $\quad \mathcal{A}_2 = \left[\dfrac{x^3}{3}\right]_{-\alpha}^{\alpha} = \dfrac{\alpha^3}{3} - \left(-\dfrac{\alpha^3}{3}\right) = \dfrac{2\,\alpha^3}{3}$.

Donc : $\quad \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 = \dfrac{4\,\alpha^3}{3}$

L'aire du segment de parabole AOB est égale aux $\frac{2}{3}$ *de celle du rectangle ABCD.*

• **Aire du domaine limité par une arche de sinusoïde** (fig. 10).

Soit à calculer l'aire A du domaine plan défini, en axes orthonormés, par

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ 0 \leqslant y \leqslant \sin x. \end{cases}$$

Puisque la fonction « moins cosinus » est une primitive de la fonction sinus :

$$\mathcal{A} = \int_0^{\pi} \sin x\, dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0$$

$$\mathcal{A} = 2 .$$

Remarquons que $\mathcal{A}_1 = \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\, dx = \Big[-\cos x\Big]_{\pi}^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos \pi.$

$\mathcal{A}_1 = -2$ (conformément à P_2).

Alors, ainsi qu'il était prévisible, *l'aire algébrique* du domaine limité par l'axe Ox, la courbe d'équation $y = \sin x$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2\pi$, est *nulle*. En effet $\int_0^{2\pi} \sin x\, dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos 0 = 0.$

Bien entendu, l'*aire arithmétique* du même domaine est 4.

• Aire d'un domaine compris entre deux arcs de courbes (fig. 11).

Soit à calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan défini par $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ f_2(x) \leqslant y \leqslant f_1(x). \end{cases}$

Si F_1 et F_2 sont des primitives de f_1 et f_2 il est immédiat que :

$$\mathcal{A} = \Big| F_1(b) - F(a) - [F_2(b) - F(a)] \Big| .$$

Remarquons que si $\varphi = F_1 - F_2$,

alors $\mathcal{A} = \Big| \varphi(b) - \varphi(a) \Big| .$

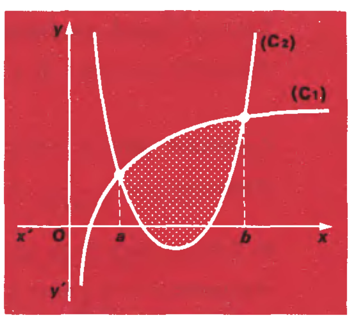


Fig. 11.

EXERCICES

19-1 **Dans un repère orthonormé calculer les aires des domaines limités par les courbes d'équation :**

(1)	$y = x^3 - 1$;	$y = 0$;	$x = 1$;	$x = 2$
(2)	$y = x^3 - 3x + 2$;	$y = 0$;	$x = -2$;	$x = 1$
(3)	$y = 4x^3 - 3x + 1$;	$y = 0$;	$x = -1$;	$2x - 1 = 0$
(4)	$y = \lvert\cos x\rvert$;	$y = 0$;	$x = 0$;	$x = 2\pi$
(5)	$y = x\lvert x\rvert$;	$y = 0$;	$x = -1$;	$x = 2.$

19-2 Construire, dans un repère orthonormé, la courbe Γ d'équation $y = 2\cos^2 x + \sin 2x$. Calculer l'aire du domaine limitée par (Γ), l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$.

19-3 Construire, dans un repère orthonormé, la courbe (Γ) d'équation $y = \frac{1}{x^2}$.
Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par (Γ), l'axe $x'Ox$ et les droites $x = 1$, $x = \alpha$ (avec $\alpha > 0$). Calculer $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \mathcal{A}$.

19-4 Construire dans un repère orthonormé, la courbe (Γ) d'équation $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par (Γ), l'axe $x'Ox$, les droites d'équation $x = 1$ et $x = a$ (avec $0 < a < 1$). Calculer $\lim\limits_{a \to 0} \mathcal{A}$.

19-5 Soit $\mathcal{D}$ le domaine limité par l'axe $x'Ox$ et l'arc de courbe $y = x(1 - x)$ avec $0 \leqslant x \leqslant 1$. Partager le domaine $\mathcal{D}$ en deux parties de même aire par une droite issue de O.

19-6 Calculer l'aire A du domaine compris entre les arcs (C_1) et (C_2) des courbes d'équation $y = \cos x$ et $y = 1 - \cos x$ avec $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ (axes orthonormés).

19-7 Construire, dans le même repère orthonormé xOy, les courbes (C_1) et (C_2) d'équation $y = \frac{1}{2\cos 2x}$ et $y = \frac{\sin^2 x}{\cos 2x}$.

2° Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine compris entre (C_1), (C_2), l'axe $y'Oy$, et la droite d'équation $x = \alpha$ $\left(\text{avec } 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}\right)$.

3° L'aire $\mathcal{A}$ a-t-elle une limite lorsque $\alpha \longrightarrow \frac{\pi}{4}$?

19-8 **Construire, dans le même repère orthonormé, les courbes (C_1) et (C_2) dont les équations sont données ci-dessous et calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine borné qu'elles limitent.**

(1) $y = x^2 - 4$ et $y = -x^2 + 2x$

(2) $y = \frac{1}{\cos^2 x}$ et $y = 8\cos x$

$\left(\text{domaine limité par les droites d'équation } x = 0 \text{ et } x = \frac{\pi}{3}\right)$

(3) $x^2 = 2py$ et $y = \sqrt{2px}$.

INDICATIONS

19-1 (1) L'aire demandée est

$$\mathcal{A} = \int_1^2 (x^3 - 1)dx = \left[\frac{x^4}{4} - x\right]_1^2$$

soit $$\mathcal{A} = \left(\frac{2^4}{4} - 2\right) - \left(\frac{1}{4} - 1\right) \text{ ou } \mathcal{A} = \frac{11}{4}.$$

(5) Si $x \leqslant 0$ $y = -x^2$; si $x \geqslant 0$ $y = x^2$. *Réponse :* $\frac{7}{3}$.

19-3 $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathcal{A} = 1.$

19-6 *Réponse :* $4(\sqrt{3} - 1) - \frac{\pi}{3}$.

19-8 (1) Déterminer d'abord les abscisses des points d'intersection. L'aire demandée est :

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)\, dx = \ldots = 9.$$



FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

20

● *Nous avons remarqué (cf.* 18e *leçon) que la fonction* f, *de* $\mathbb{R} - \{0\}$ *vers* $\mathbb{R}$, *telle que* $f(x) = \frac{1}{x}$, *ne figurait pas comme fonction dérivée d'une fonction connue.*

● *Or un théorème, que nous admettons ici, affirme que toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive, au moins.*

Par suite, la fonction f *telle que* $f(x) = \frac{1}{x}$ *étant continue sur* $]0, +\infty[$ *admet sur cet intervalle des fonctions primitives.*

● *Dans cette leçon, nous nous bornerons à étudier une seule de ces primitives : celle qui prend la valeur zéro pour* $x = 1$. *Cette primitive particulière s'appelle* **« fonction logarithme népérien »**.

1. DÉFINITION



● On appelle **fonction logarithme népérien, la primitive de la fonction** $x \mapsto \frac{1}{x}$, **primitive définie pour $x > 0$ et qui prend la valeur 0 pour $x = 1$.**

On la note **Log** ce qui se lit « *logarithme népérien* ».

Cette fonction est donc définie sur $]0, +\infty[$, et :

$$f(x) = \operatorname{Log} x \quad \text{équivaut à} \quad \left\{ \begin{array}{l} f'(x) = \frac{1}{x} \\ \operatorname{Log} 1 = 0 \\ x > 0 \end{array} \right.$$

En utilisant la notation de la 19e leçon, cela se traduit par :

$$\text{Log } x = \int_1^x \frac{1}{t} \cdot dt$$

Il est immédiat de remarquer que le nombre dérivé, au point x, de la fonction Log étant, par définition, $\frac{1}{x}$, la fonction Log est **strictement croissante.**

Par suite
$$\begin{cases} x_1 < x_2 \iff \text{Log } x_1 < \text{Log } x_2 \\ 0 < x < 1 \iff \text{Log } x < 0 \\ x > 1 \iff \text{Log } x > 0 \end{cases}$$

2. INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, traçons la courbe H d'équation $y = \frac{1}{x}$, avec $x > 0$.

Considérons, sur cette courbe, les points A et M d'abscisses respectives 1 et x (fig. 1).

On sait (19e leçon) que l'aire du trapèze mixtiligne A′M′MA, mesurée en prenant pour unité l'aire du carré construit sur $\vec{i}$ et $\vec{j}$, est représentée par la primitive de $\frac{1}{x}$ définie au paragraphe 1.

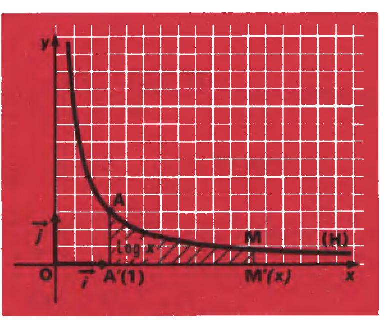


Fig. 1.

Donc **Log x représente l'aire algébrique A′M′MA.**

3. PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE DE LA FONCTION LOG

• THÉORÈME

Le logarithme népérien d'un produit de nombres réels strictement positifs est égal à la somme des logarithmes de chacun des facteurs, c'est-à-dire, pour deux facteurs :



$$\textbf{Log (ab)} = \textbf{Log a} + \textbf{Log b}$$

- **Démonstration.**

La fonction Log admet, par définition, en tout point $x > 0$, un nombre dérivé égal à $\frac{1}{x}$.

Soit a un réel strictement positif; considérons la fonction F telle que $F(x) = \text{Log } ax$.

Démontrons que cette fonction est aussi une primitive de f.

Pour cela déterminons la dérivée de F.

Or $$F(x+h) - F(x) = \text{Log } a(x+h) - \text{Log } ax$$

et $$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\text{Log } (ax+ah) - \text{Log } ax}{h}$$

ou $$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\text{Log } (ax+ah) - \text{Log } ax}{ah} \times a.$$

Par suite : $$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\text{Log } (ax+ah) - \text{Log } ax}{h} \times a.$$

Or $\lim\limits_{u \to 0} \frac{\text{Log } (X+u) - \text{Log } X}{u}$ est le nombre dérivé, pour la valeur X, de la fonction Log. Donc $\lim\limits_{u \to 0} \frac{\text{Log } (X+u) - \text{Log } X}{u} = \frac{1}{X}$.

Par suite : $$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{x} \times a = \frac{1}{ax} \times a = \frac{1}{x}$$

et F *est, comme la fonction logarithme népérien, une primitive de* f.

D'après le résultat démontré (18[e] leçon, § 2) :

$$F(x) = \text{Log } x + C, \quad \text{où C est une constante.}$$

ou $$\text{Log } ax = \text{Log } x + C$$

Pour $x = 1$: $$\text{Log } a = \text{Log } 1 + C = C$$

Donc $\forall a > 0, \forall x > 0$ $$\textbf{Log ax} = \textbf{Log a} + \textbf{Log x}$$

et, en remplaçant x par b : $$\textbf{Log ab} = \textbf{Log a} + \textbf{Log b}$$

4. CONSÉQUENCES DE LA PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE

P₁ *Deux nombres inverses ont des logarithmes opposés*, soit :

(si $b > 0$) $$\text{Log}\,\frac{1}{b} = -\text{Log}\,b \qquad (1)$$

En effet : $b \times \frac{1}{b} = 1.$

Donc (§ 3) : $\text{Log}\,b + \text{Log}\,\frac{1}{b} = \text{Log}\,1 = 0$

ou $\text{Log}\,\frac{1}{b} = -\text{Log}\,b.$

P₂ Si a et b sont positifs :

$$\text{Log}\,\frac{a}{b} = \text{Log}\,a - \text{Log}\,b \qquad (2)$$

Posons $x = \frac{a}{b}$. Alors $x = a \times \frac{1}{b}$ et $\text{Log}\,x = \text{Log}\,a + \text{Log}\,\frac{1}{b}$.

D'où la propriété.

P₃ *Quel que soit l'entier naturel* n *et quel que soit le réel* a *positif :*

$$\text{Log}\,a^n = n.\text{Log}\,a \qquad (3)$$

Raisonnons par récurrence (cf. 1re leçon).

La propriété est vraie pour $n = 0$.

Supposons qu'elle soit vraie pour p (donc $\text{Log}\,a^p = p\,\text{Log}\,a$).

Alors : $\text{Log}\,a^{p+1} = \text{Log}\,(a^p.a) = p\,\text{Log}\,a + \text{Log}\,a$

$\text{Log}\,a^{p+1} = (p+1)\,\text{Log}\,a.$

La propriété est donc vraie pour $p + 1$.

Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

P_4 *Quel que soit* n *entier relatif, et quel que soit* a *positif :*

$$\text{Log } a^n = n \text{ Log } a$$

— La propriété est démontrée pour $n \in \mathbb{N}$.

— Supposons $n < 0$. Posons $n = -n'$ avec $n' > 0$.

Alors $a^n = \frac{1}{a^{n'}}$ et $\text{Log } a^n = \text{Log } \frac{1}{a^{n'}} = -\text{Log } a^{n'}$

D'après P_3, $\text{Log } a^{n'} = n' \text{ Log } a$.

Donc $\text{Log } a^n = -n' \text{ Log } a = n \text{ Log } a$.

P_5 *Quel que soit* $a > 0$:

$$\text{Log } \sqrt{a} = \frac{1}{2} \text{ Log } a$$

Posons $x = \sqrt{a}$, alors $x^2 = a$ et $\text{Log } x^2 = 2 \text{ Log } x = \text{Log } a$.

Donc $\text{Log } x = \frac{1}{2} \text{ Log } a$. D'où la propriété.

P_6 *Quel que soit* $a > 0$ *et quel que soit* n *entier non nul* :

$$\text{Log } \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \text{ Log } a$$

Rappelons que $\sqrt[n]{a}$ est le réel x positif (dont nous admettons l'existence) tel que $x^n = a$.

Alors $\text{Log } x^n = \text{Log } a$. D'après P_3 : $\text{Log } x^n = n \text{ Log } x$.

Donc $\text{Log } x = \frac{1}{n} \text{ Log } a$. D'où la propriété.

5. ÉTUDE DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

• Rappelons d'abord les propriétés résultant immédiatement de la définition de la fonction logarithme népérien (§ 1) :

— elle est **définie** sur $]0, +\infty[$;

— étant **dérivable,** elle est **continue** sur $]0, +\infty[$;

— sa **dérivée** $\left(\text{égale à } \frac{1}{x} \text{ par définition}\right)$ est positive strictement.

Donc la fonction Log est *croissante au sens strict*. Il en résulte que :

$$a < b \text{ (dans } \mathbb{R}^{*+}) \iff \operatorname{Log} a < \operatorname{Log} b$$
$$a = b \text{ (dans } \mathbb{R}^{*+}) \iff \operatorname{Log} a = \operatorname{Log} b$$

En particulier, puisque $\operatorname{Log} 1 = 0$,

$$0 < x < 1 \iff \operatorname{Log} x < 0$$
$$x = 1 \iff \operatorname{Log} x = 0$$
$$x > 1 \iff \operatorname{Log} x > 0$$

• **Limite de Log x quand x tend vers $+\infty$.**

Pour étudier la limite de Log x quand x tend vers $+\infty$, nous disposons : de la formule $\operatorname{Log} a^n = n \operatorname{Log} a$, et du fait que la fonction Log est croissante.

Soit B un réel positif. Pour obtenir $\operatorname{Log} x > B$, il suffit, puisque $x > 2^n$ implique $\operatorname{Log} x > n \operatorname{Log} 2$, que soient vérifiées :

$$\begin{cases} n \operatorname{Log} 2 > B \\ x > 2^n \end{cases}$$

Or, $\operatorname{Log} 2 > 0$. Par suite, quel que soit $B \in \mathbb{R}^+$, il existe n tel que $n \operatorname{Log} 2 > B$.

Donc, en posant $A = 2^n$:

$$\forall B \in \mathbb{R}^+, \quad \exists A \in \mathbb{R}^+ \quad \text{tel que} \quad x > A \implies \operatorname{Log} x > B$$

c'est-à-dire :



$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{Log} x = +\infty$$

(ou **Log x tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$**).

- **Limite de Log x lorsque x tend vers 0^+.**

Posons $\frac{1}{z} = x$. Quand x tend vers 0^+, z tend vers $+\infty$.

Alors $\text{Log}\, x = \text{Log}\, \frac{1}{z} = -\text{Log}\, z$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0^+.

D'où :

$$\lim_{x \to 0^+} \text{Log}\, x = -\infty$$

(ou **Log x tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0^+**)

- **Le nombre e.**

Puisque la fonction f est continue et croissante de $-\infty$ à $+\infty$, il existe un réel unique tel que $\text{Log}\, x = 1$. Ce réel est appelé *nombre* e :

$$\text{Log}\, e = 1$$

On démontre, par des méthodes qui sont hors du programme de la classe que : le nombre e n'est ni rationnel, ni algébrique (c'est-à-dire n'est pas solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers), c'est donc un nombre *transcendant* (comme π) ; la valeur approchée, à 10^{-5} près par défaut, de e est

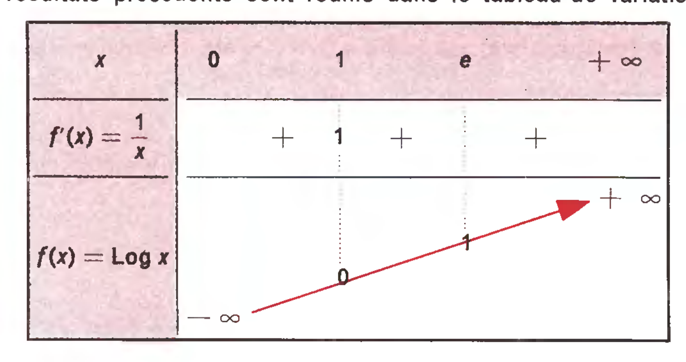
2,718 28

Nous indiquons, en complément (§ 6), comment obtenir d'une manière simple l'encadrement

$$2 < e < 3.$$

- **Tableau de variation et représentation graphique.**

Les résultats précédents sont réunis dans le tableau de variation suivant :



x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{x}$		+	1	+		+	
$f(x) = \text{Log}\, x$	$-\infty$		0		1		$+\infty$

On en déduit la représentation graphique cartésienne (L), tracée dans un repère orthonormé (fig. 2).

REMARQUES

1. La tangente à (L) au point A (1, 0) a *pour pente* $\frac{1}{1} = 1$.

2. La tangente au point E(*e*, 1) a pour pente $\frac{1}{e}$, donc pour équation :

$y - 1 = \frac{1}{e}(x - e)$, soit $y = \frac{1}{e}x$.

Elle passe donc par O.

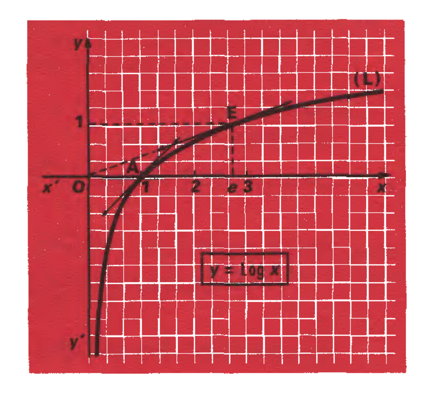


Fig. 2.

6. UN ENCADREMENT DU NOMBRE e

- **Montrons que le nombre e est compris entre 2 et 4** (fig. 3).

1° $\text{Log } 2 = \overline{\text{aire}}\ (ABCD)$ et $\overline{\text{aire}}\ (ABCD) < \overline{\text{aire}}\ (ABED)$.

Donc $\text{Log } 2 < 1$

et $\quad 2 < e$.

2° La somme des aires hachurées (fig. 3) est inférieure à Log 4, soit

$\text{Log } 4 > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

$\text{Log } 4 > 1$

$4 > e$.

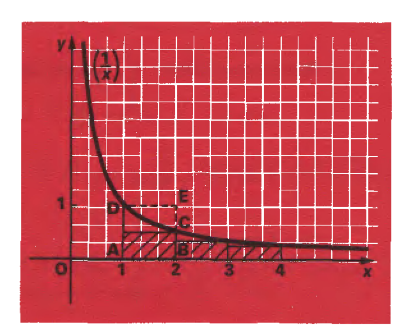


Fig. 3.

- **Montrons que le nombre e est compris entre 2 et 3** (fig. 4).

Considérons le trapèze A′AFF′ délimité par O*x*, les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$, et la tangente au point C d'abscisse 2 sur la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ (fig. 4) :

$\overline{\text{aire}}\ (A'AFF') = 1$

$\overline{\text{aire}}\ (A'AFF') < \text{Log } 3$.

Donc : $\quad e < 3$.

En résumé $\quad 2 < e < 3$.

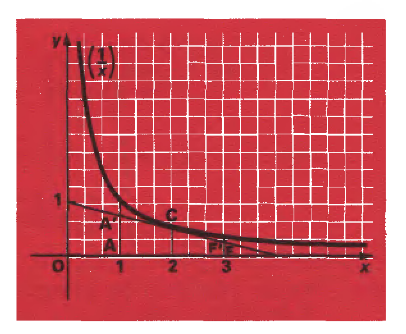


Fig. 4.



EXERCICES

20-1 Déterminer x défini par

$$2 \text{ Log } x = \text{Log } 2 + \text{Log }(2+\sqrt{2}) + \text{Log }\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) + \text{Log }\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right).$$

20-2 Pour $a > 1$ et $b > 1$, calculer

$$y = \text{Log }(a^2 - 1) + \text{Log }(b^2 - 1) - \text{Log }[(ab+1)^2 - (a+b)^2].$$

20-3 Comparer, pour $x > 1$, $\text{Log }\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ et $\text{Log }\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$.

20-4 Démontrer que $\frac{7}{16} \text{ Log }(3+2\sqrt{2}) = \frac{25}{8} \text{ Log }(\sqrt{2}-1) + 4 \text{ Log }(\sqrt{2}+1)$.

20-5 Déterminer $\frac{a}{b}$ sachant que a et b sont des réels positifs vérifiant

$$\text{Log } \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\text{Log } a + \text{Log } b).$$

20-6 **Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :**

(1) $\text{Log } 2x - \text{Log }(x-2) = \text{Log } 3$

(2) $2 \text{ Log }(3x-4) + \text{Log }(10x-4) = \text{Log }(5x-2)$

(3) $2 \text{ Log } x - \text{Log }(x-5) = \text{Log } 3$

(4) $\text{Log }(x^2-1) = \text{Log }(4x-1) - 2 \text{ Log } 2$

(5) $\text{Log }(150 - 25x - x^2) = 3 \text{ Log }(5-x)$

(6) $\text{Log }(x^2-1) = \text{Log }(x-2) + \text{Log }(x-3)$

20-7 **Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les systèmes suivants :**

(1) $\begin{cases} x + y = 3e \\ \text{Log } x + \text{Log } y = 2 + \text{Log } 2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x + y = 25 \\ \text{Log } x + \text{Log } y = \text{Log } 100 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4a^2 \\ \text{Log } x + \text{Log } y = 2 \text{ Log } 3a - 3 \text{ Log } 2 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} xy + x + y = 2 \\ \text{Log }(x+1) + \text{Log }(y-1) = 1 \end{cases}$

20-8 Préciser pour quelles valeurs de x sont définies les expressions suivantes :

(1) $\text{Log }[\text{Log }(\text{Log } x)]$

(2) $\sqrt{\frac{\text{Log } x - 1}{\text{Log } x + 1}}$.

20-9 Former l'équation de la tangente (t) à la courbe d'équation $y = \text{Log } x$ au point d'abscisse x. Déterminer x pour que (t) passe par O.

20-10 Dans un repère orthonormé, soit (L) la courbe d'équation $y = \text{Log } x$. Soit A le point de coordonnées (1, 0) et M le point, de (L), d'abscisse $x (\geqslant 1)$. La tangente en M à (L) coupe en P la droite d'équation $x - 1 = 0$.

1° Calculer l'aire $\mathcal{A}(x)$ du domaine limité par le contour mixtiligne AMPA.

2° Résoudre l'équation $2e.\mathcal{A}(x) = e^2 - 2e - 1$.

20-11 1° Etudier l'application f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = x \text{ Log } x$. Construire, dans un repère orthonormé, la courbe (C) d'équation $y = x \text{ Log } x$ et les tangentes à (C) en ses points d'intersection avec l'axe $x'Ox$.

2° Etudier l'application g de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g(x) = x^2 \text{ Log } x - \dfrac{x^2}{2}$.

Construire la courbe (γ) d'équation $y = x^2 \text{ Log } x - \dfrac{x^2}{2}$.
Préciser les tangentes à (γ) en ses points d'intersection avec l'axe $x'Ox$.

3° Calculer l'aire limitée par la courbe (C) (voir 1°), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x - 1 = 0$.



INDICATIONS

• **Néper** (ou Napier) John, baron de Merchiston (1550-1617).

Mathématicien écossais qui, pour simplifier certains calculs, découvrit les logarithmes, en associant deux à deux les termes d'une progression géométrique et ceux d'une progression arithmétique. En son honneur, certains logarithmes furent qualifiés de **népériens**.

20-1 $x = 2$.

20-3 $\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) . \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) = 1$, alors...

20-4 Remarquer que $3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^2$ et que $\sqrt{2} - 1 = \dfrac{1}{\sqrt{2} + 1}$.

20-6 } Utiliser la propriété fondamentale *et* le fait que Log u est défini si, et seulement
20-7 } si, $u > 0$.

Par exemple (6), résoudre Log $(x^2 - 1) \neq$ Log $(x - 2)$ + Log $(x - 3)$ (1).

La fonction : $x \mapsto$ Log $(x^2 - 1)$ est définie pour $x \notin [-1, +1]$;
La fonction : $x \mapsto$ Log $(x - 2)$ est définie pour $x > 2$;
La fonction : $x \mapsto$ Log $(x - 3)$ est définie pour $x > 3$.

Donc l'équation (1) a pour ensemble $\mathfrak{D}$ de définition $x > 3$.

Sur cet ensemble, l'équation *équivaut à :*

$$\text{Log}\,(x^2 - 1) = \text{Log}\,(x - 2)\,(x - 3)$$

et à
$$(x^2 - 1) = (x - 2)(x - 3)$$

soit
$$-1 = -5x + 6$$

ou
$$x = \frac{7}{5}$$

Puisque $\frac{7}{5} \notin \mathfrak{D}$, l'équation (1) n'a pas de solution.

20-8 1° Log (Log x) $> 0 \iff$ Log $x > 1 \iff x > e$.

20-9 Désigner par (X, Y) les coordonnées du point courant de (t).

20-10 1° $\mathfrak{A}(x) = \frac{x}{2} - \text{Log}\, x - \frac{1}{2x}$.
2° L'équation a une solution évidente et $\mathfrak{A}(x)$ est croissante...

20-11 3° $g'(x) = 2 f(x)$.

FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE *e*



● *La fonction logarithme népérien, définie sur* $\mathbb{R}^{*+}$*, c'est-à-dire* $]0, +\infty[$*, continue et strictement croissante, réalise une bijection de* $\mathbb{R}^{*+}$ *sur* $\mathbb{P}$ *(20*e *leçon).*

Il existe donc une fonction *(cf. 5*e *leçon)* **réciproque** *(ou inverse), bijection de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}^{*+}$ *(fig. 1).*

Cette fonction, appelée **exponentielle de base e**, *est l'objet de cette leçon.*

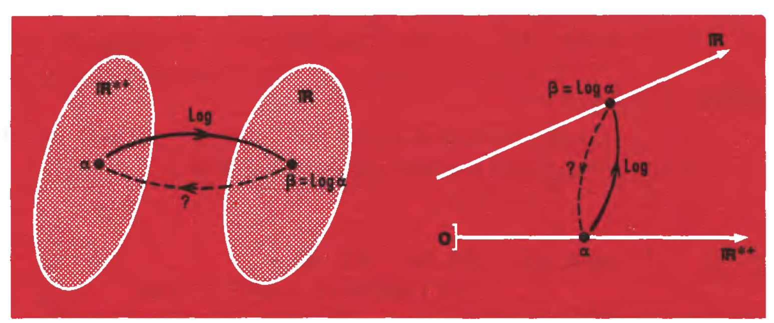


Fig. 1.

1. DÉFINITION

● **La fonction exponentielle de base e est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.**

Provisoirement, nous la noterons *exp$_e$*.

Ainsi l'image y de x est $y = \exp_e(x)$; on lit « y *égale exponentielle de* x ».

Donc : $y = \exp_e(x)$ équivaut à $\begin{cases} x = \operatorname{Log} y \\ y > 0 \end{cases}$

2. PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

● THÉORÈME

Quels que soient les réels *a* et *b* :

$$\mathbf{exp_e\,(a + b) = exp_e\,(a) \times exp_e\,(b)} \qquad (1)$$

Soit a et b deux réels et $c = a + b$.

● Il existe trois réels strictement positifs α, β, γ, déterminés de façon *unique* tels que :

$$a = \text{Log}\ \alpha \qquad b = \text{Log}\ \beta \qquad c = \text{Log}\ \gamma$$

c'est-à-dire tels que :

$$\alpha = \exp_e(a) \qquad \beta = \exp_e(b) \qquad \gamma = \exp_e(c)$$

● Puisque $c = a + b$:

$$\text{Log}\ \gamma = \text{Log}\ \alpha + \text{Log}\ \beta$$

$$\text{Log}\ \gamma = \text{Log}\ \alpha\,\beta \quad (20^e \text{ leçon, § 3})$$

$$\gamma = \alpha\,\beta.$$

soit : $\exp_e(c) = \exp_e(a) \,.\, \exp_e(b)$.

Donc : $\exp_e(a + b) = \exp_e(a) \,.\, \exp_e(b)$ (1)

La figure 2 illustre cette propriété.

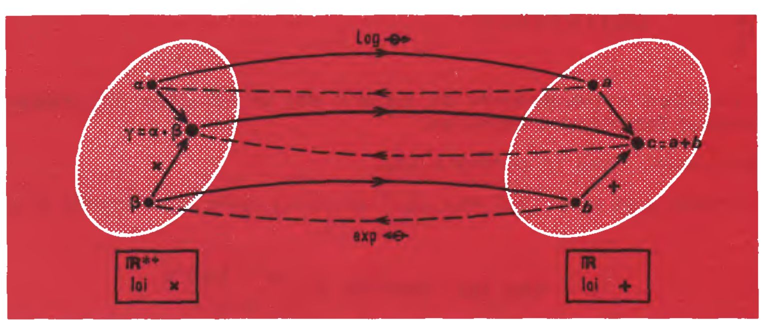


Fig. 2.

3. CONSÉQUENCES DE LA PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE

❶ $$\exp_e(0) = 1$$

En effet, $\text{Log } 1 = 0$ équivaut à $\exp_e(0) = 1$ (§ 1).

❷ $$\exp_e(-a) = \frac{1}{\exp_e(a)}$$

En effet : $\exp_e(a) . \exp_e(-a) = \exp_e(a - a) = \exp_e(0) = 1.$

Ce qui s'énonce : *deux nombres réels opposés ont des exponentielles inverses.*

❸ Quel que soit l'entier relatif n :

$$\exp_e(n) = e^n$$

et, plus généralement, $$\exp_e(na) = [\exp_e(a)]^n$$

En effet : $\text{Log}[\exp_e(n)] = \text{Log}(e^n) = n$

et $\text{Log}[\exp_e(na)] = \text{Log}[\exp_e(a)]^n = na.$

4. NOTATION DÉFINITIVE

● Nous venons de démonter que, quel que soit l'entier relatif n, $\exp_e(n) = e^n$. Par suite, la propriété fondamentale (1) n'est, pour **a et b,** entiers positifs ou négatifs, que la traduction de la formule des exposants :

$$e^{a+b} = e^a . e^b$$

Mais la relation $\exp_e(a) . \exp_e(b) = \exp_e(a + b)$ est valable quels que soient a et b réels. D'où la **convention :**

pour tout x réel, on pose $$\exp_e(x) = e^x$$ (se lit « e *puissance* x »).

● Avec cette notation, pour tous les réels x et x' : la définition et les propriétés (§ 3) se traduisent sous la forme :

$$\text{Log}(e^x) = x \qquad e^{\text{Log } x} = x \qquad e^0 = 1$$

$$e^x . e^{x'} = e^{x+x'} \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x}.$$



5. ÉTUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE e

• DÉFINITION

La fonction exponentielle de base *e* est **définie** sur $\mathbb{R}$ et, quel que soit le réel x :

$$e^x > 0$$

• DÉRIVABILITÉ

Posons $f(x) = e^x$.

Alors $f(x+h) - f(x) = e^{x+h} - e^x$

$= e^x \cdot e^h - e^x$

Par suite $\rho = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = e^x \cdot \dfrac{e^h - 1}{h}$. Et $\lim\limits_{h \to 0} \rho = e^x \cdot \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h}$.

Posons $e^h = u$, ce qui équivaut à $\begin{cases} u > 0 \\ h = \text{Log } u. \end{cases}$

Donc $$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{u - 1}{\text{Log } u},$$

Or $\lim\limits_{u \to 1} \dfrac{\text{Log } u - \text{Log } 1}{u - 1}$ est, par définition, le nombre dérivé de la fonction Log pour $u = 1$. Ce nombre dérivé est égal à 1 (cf. 20e leçon).

Donc $\lim\limits_{h \to 0} \rho = e^x$. C'est-à-dire :

THÉORÈME

La fonction exponentielle de base *e* est égale à sa fonction dérivée.

• VARIATION

La fonction exponentielle ayant une dérivée positive (strictement) est *strictement croissante.*

• Limite de e^x quand x tend vers $-\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$; il existe A tel que $e^A = \varepsilon$, c'est $A = \text{Log } \varepsilon$.

Et $x < A$ implique $e^x < \varepsilon$.

Donc, e^x tend vers 0^+ quand x tend vers $-\infty$ ou : $$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+$$

• Limite de e^x quand x tend vers $+\infty$.

Soit $B \in \mathbb{R}^+$; il existe A tel que $e^A = B$, c'est $A = \text{Log } B$.

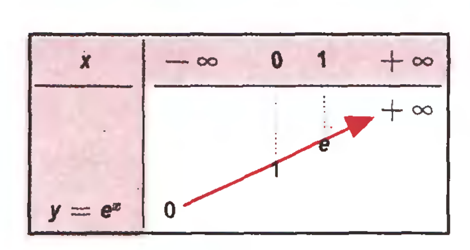
Et $x > A$ implique $e^x > B$.

Donc, e^x tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ ou :

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

6. TABLEAU DE VARIATION ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

Les résultats précédents sont réunis dans le tableau de variation ci-dessous :



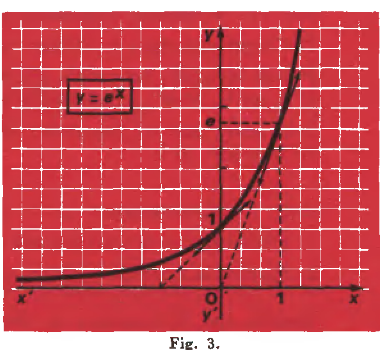


Fig. 3.

On en déduit la représentation graphique cartésienne (Γ) tracée dans un repère orthonormé (fig. 3).

REMARQUES

1. La courbe (Γ) d'équation $y = e^x$ est symétrique de la courbe L, d'équation $y = \text{Log } x$ par rapport à la bissectrice de $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2. La tangente à Γ au point A (0, 1) a pour pente 1.

3. La tangente au point E $(1, e)$ a pour pente e et pour équation : $y - e = e(x - 1)$ soit $y = e.x$. Elle passe donc par O.

EXERCICES

21-1 *Simplifier les expressions :*

$$e^{4 \operatorname{Log} 2} \qquad \operatorname{Log} e^{-\frac{1}{2}} \qquad e^{-4 \operatorname{Log} 3} \qquad e^{-3 \operatorname{Log} 2} \cdot \operatorname{Log} \sqrt{e}.$$

21-2 **Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations :**

(1) $e^{2x} - e^{x} - 2 \doteqdot 0.$

(2) $e^{2x} - 6\, e^{x} + 5 \doteqdot 0.$

(3) $e^{2x} - e^{-x} \doteqdot 8.$

(4) $e^{x} - 7 + 10\, e^{-x} \doteqdot 0.$

(5) $e^{x} - e^{-x} \doteqdot \frac{15}{4}.$

(6) $e^{3x+1} - 2\, e^{2x} + e^{x+1} \doteqdot 0.$

21-3 On désigne par (Γ) la courbe d'équation $y = e^{x}$ dans un repère orthonormé xOy. La tangente à (Γ) au point M d'abscisse x coupe l'axe $x'Ox$ en T, d'abscisse x'. Soit M′ le point de (Γ) d'abscisse x'.

Calculer l'aire limitée par le contour mixtiligne TMM′T.

21-4 Soit (Γ) la courbe d'équation $y = e^{x}$ dans un repère orthonormé.

1° Construire, dans le même repère, la courbe (Γ) d'équation $y = e^{-x}$.

2° Soit M_0 et M'_0 les points d'abscisse x_0 sur (Γ) et (Γ'). Les tangentes, à (Γ) et (Γ'), en M_0 et M'_0, coupent Ox en T et T′.

Démontrer que les tangentes sont perpendiculaires et calculer la longueur TT′ en fonction de x_0.

21-5 Soit f l'application de $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = x\, e^{\frac{1}{2}|\operatorname{Log} x^2|}$

1° Démontrer que f est impaire.

2° Etudier la fonction f. Construire sa représentation graphique.

21-6 **Etudier les fonctions f et construire leurs représentations graphiques.**

(1) $f(x) = x - e^{x}$

(2) $f(x) = \dfrac{e^{x}}{x+1}.$

21-7 On pose $f(x) = e^{x}$ et $g(x) = e^{-x}$.

Comparer $g(-x)$ et $f(x)$. En déduire la représentation graphique de la courbe (C) d'équation $y = g(x)$, la courbe (Γ) d'équation $y = f(x)$ étant construite.

21-8 1° On pose $\alpha(x) = e^{x}$ et $\beta(x) = e^{-x}$.

Comparer $\beta(-x)$ et $\alpha(x)$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \beta(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \beta(x)$.

2° On pose $f(x) = \dfrac{\alpha(x) + \beta(x)}{2}$ et $g(x) = \dfrac{\alpha(x) - \beta(x)}{2}.$

Calculer $[f(a)]^2 - [g(a)]^2$.

3° Exprimer $f(a)\, g(b) + f(b)\, g(a)$ à l'aide de $g(a+b)$.

4° Exprimer $f(2a)$ et $g(2a)$ à l'aide de $f(a)$ et $g(a)$.

INDICATIONS

21-1 $e^{4 \text{ Log } 2} = e^{\text{Log } 2^4} = 2^4 = 16.$

21-2 Poser $e^x = t$ avec $t > 0$.

Par exemple (1) $\Longleftrightarrow \begin{cases} t^2 - t - 2 = 0 \Longleftrightarrow t = 2. \\ t > 0 \end{cases}$

D'où une solution unique $x = \text{Log } 2$.

21-3 La fonction exponentielle est égale à sa dérivée. Donc une primitive de la fonction exponentielle est ...

21-5 Si $0 < x \leqslant 1$, $f(x) = 1$. Si $x \geqslant 1$, $f(x) = x^2$.

21-7 (C) et (Γ) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

21-8 2° Quel que soit le réel a, $[f(a)]^2 - [g(a)]^2 = 1$.

4° $g(2a) = 2 f(a) . g(a)$.

L'ALGÈBRE DES ÉVÉNEMENTS

22

● *Les actes de la vie courante sont — aussi indépendants qu'on veuille les concevoir — tributaires de multiples* **événements.** *Comment alors prendre une décision « en toute connaissance »?*

Il est clair qu'un événement isolé ne sera pas d'un grand intérêt : s'il y a décision à prendre, c'est que plusieurs événements se présentent ensemble. D'où la nécessité de dresser l'inventaire exhaustif des événements **possibles.**

Nous allons alors constater la parfaite similitude entre le **langage des ensembles** *(cf. 2e leçon) et le* **langage des événements.** *Il en résultera qu'à l'algèbre des parties d'un ensemble (intersection, réunion, complémentaire) (cf. 3e leçon) va correspondre l'algèbre des événements.*

● *Autrement dit, nous allons effectuer une* **traduction.** *Comme dans toute traduction, nous aurons à rédiger des thèmes et des versions : traduire dans le langage des événements des phrases exprimées dans le langage des ensembles (cf. 1re partie) et inversement.*

● *Dans ce but, nous allons construire un dictionnaire permettant ces traductions. Ainsi vont être mises en correspondance les expressions suivantes :* **élément d'un ensemble** *et* **possible**; **partie d'un ensemble** *et* **événement**; **complémentaire** *d'une partie et* **événement contraire**; *ensemble* **vide** *et événement* **impossible**; *partie* **pleine** *et événement* **certain**; **réunion** *de deux parties et événement* « **ou** »; **intersection** *de deux parties et événement* « **et** »; **parties disjointes** *et* **événements incompatibles.**

1. ÉVÉNEMENTS

● Étude d'un exemple.

Neuf personnes formant un comité décident de voter *pour* ou *contre* une certaine décision à prendre. Admettons que tout le monde prenne part au vote et qu'il n'y a ni abstention, ni bulletin blanc. Il est possible de traduire alors, dans le langage des ensembles, des phrases telles que :

a) 4 personnes sont *pour ;*

b) la majorité est *pour ;*

c) 2 personnes au moins sont *contre.*

Comme il y a 10 possibilités différentes de vote, puisque le nombre de voix *pour* peut varier de 0 à 9, nous considérerons l'ensemble :

$$\mathcal{U} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Au vote, ou à ce qu'en probabilités on appelle aussi l'**épreuve,** nous associerons un élément r de $\mathcal{U}$, appelé la **réalité,** par exemple 4 s'il y a eu effectivement 4 voix *pour*. Alors les trois phrases ci-dessus peuvent s'écrire à l'aide du symbolisme de la théorie des ensembles (cf. 2ᵉ leçon) :

4 personnes sont *pour*	$\iff r = 4 \iff r \in \{4\}$
la majorité est *pour*	$\iff r \geqslant 5 \iff r \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$
2 personnes au moins sont *contre*	$\iff r \leqslant 7 \iff r \in \mathcal{U} - \{8, 9\}$

A chacune de ces phrases correspond un sous-ensemble de $\mathcal{U}$. Une telle phrase portant le nom d'événement dans le langage courant, il est normal, par analogie, d'appeler **événement,** le **sous-ensemble** correspondant de $\mathcal{U}$.

De plus, les divers éléments de $\mathcal{U}$ témoignent des diverses possibilités et de toutes les possibilités ; on les appelle **possibles.** Ceci nous conduit naturellement aux définitions suivantes.

DÉFINITIONS

1 *Soit $\mathcal{U}$ un ensemble, appelé* **univers,** *et dont les éléments sont appelés* les **possibles.** On appelle **événement, tout sous-ensemble** *de* $\mathcal{U}$**,** c'est-à-dire :

$$a \text{ est un événement} \iff a \subset \mathcal{U} \iff a \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$$

en désignant par $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ l'*ensemble des parties de* $\mathcal{U}$ (cf. 2ᵉ leçon).

Notons que, dans l'exemple précédent, 4 est un *possible* mais non un événement. Ce qui correspond à l'événement : « *4 personnes sont pour* », c'est $\{4\}$, c'est-à-dire l'*ensemble* réduit au seul élément 4.

2 Parmi les éléments de $\mathcal{U}$, un et un seul porte le nom de **réalité.** On le désigne par r. L'univers $\mathcal{U}$ est associé à une certaine épreuve, le choix de r dépend du résultat de cette épreuve.

3 Nous dirons alors qu'un **événement** a **est réalisé** si r est l'un de ses éléments. Par suite :

$$a \text{ est réalisé} \iff r \in a$$

$$a \text{ n'est pas réalisé} \iff r \notin a$$

Il résulte de ceci que, quel que soit le choix de r :

$r \in \mathcal{U}$ c'est-à-dire que $\mathcal{U}$ est toujours réalisé ; on dit que $\mathcal{U}$ est l'*événement certain* ou le *certain*.

$r \notin \varnothing$ c'est-à-dire que $\varnothing$ n'est jamais réalisé ; on dit que $\varnothing$ est l'*événement impossible* ou l'*impossible*.

2. CLASSIFICATION DES UNIVERS

- **Univers finis.**

Si, à propos d'une certaine épreuve, il n'y a qu'un nombre fini de possibilités, l'univers correspondant est dit fini.

EXEMPLES

1. Un commerçant dispose de 5 unités d'un certain article en stock. A la fin de sa journée, il fait l'inventaire du stock. Les possibles sont les entiers de 0 à 5, suivant qu'il lui reste de 0 à 5 unités ; par suite $\mathcal{U} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Alors
$r = 5 \iff$ le commerçant n'a rien vendu,
$r \in \{0, 1, 2\} \iff$ le commerçant a vendu au moins 3 unités.

2. **Montrons sur un second exemple qu'il est possible de considérer des univers finis, non numériques.**

Jean et Pierre passent un concours. A toute possibilité concernant l'issue de ce concours, faisons correspondre un couple (cf. 3ᵉ leçon) dont la première projection (ou la seconde) sera A ou R suivant que Jean (ou Pierre) est admis ou refusé. Il y a 4 possibilités qui conduisent à l'univers :

$$\mathcal{U} = \{(A,A), \quad (A,R), \quad (R,A), \quad (R,R)\}$$

Dans ces conditions :

$r = (A,R) \iff$ Jean est admis et Pierre refusé ;

$r \in \{(A,A), (A,R)\} \iff$ Jean est admis ;

$r \in \mathcal{U} - \{(R,R)\} \iff$ l'un au moins des deux est admis.

- **Univers dénombrables.**

Chaque fois qu'une épreuve consiste à compter des objets, et qu'il n'y a pas de limite supérieure, alors l'univers peut être assimilé à $\mathbb{N}$, ensemble des entiers naturels.

Nous dirons que **l'univers $\mathcal{U}$ est dénombrable s'il existe une bijection entre $\mathcal{U}$ et $\mathbb{N}$.** Très fréquemment, il y a identité entre $\mathcal{U}$ et $\mathbb{N}$.

EXEMPLE

On compte le nombre des voitures se présentant au poste de péage d'une autoroute en une période de 15 minutes. On pose $\mathcal{U} = \mathbb{N}$.

$r \in \mathcal{U} - \{0,1\}$ $\iff$ il s'est présenté plus d'une voiture.

Si l'on sait qu'il est impossible qu'il passe plus de 1 000 voitures pendant ces 15 minutes, on peut supposer l'univers fini. Mais il est parfois préférable, pour des raisons de commodité mathématique, de considérer l'univers comme infini.

- **Univers continus.**

Si l'épreuve à laquelle est associé l'univers consiste à mesurer une grandeur continue : longueur, masse, temps, etc., à chaque résultat possible correspond un nombre réel. L'univers est alors un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, ensemble des réels. Nous dirons que cet **univers est continu** si :

1. $\mathcal{U}$ est un intervalle, ou un segment;

ou 2. $\mathcal{U}$ est une demi-droite, par exemple l'ensemble des réels positifs;

ou 3. $\mathcal{U} = \mathbb{R}$.

EXEMPLES

1. Dans un bloc de 10 kg d'un certain alliage, on effectue un prélèvement en vue d'analyse. Si m est la masse en kg du morceau prélevé, on pose $r = m$, alors : $\mathcal{U} = [0, 10]$.

Par suite : $r \in [0, 1]$ $\iff$ le morceau prélevé pèse au plus 1 kg.

2. On mesure, en secondes, le temps qui s'écoule entre l'instant où l'on donne à un avion l'ordre d'atterrir et celui où son processus d'atterrissage se termine. Alors $\mathcal{U}$ est l'ensemble des réels positifs. Il est bien évident que, si l'on se contente de mesurer ce temps à une seconde près, et si l'on sait que l'avion ne mettra jamais plus de 10 minutes pour atterrir, alors on pourra considérer l'univers comme fini.

3. ALGÈBRE DES ÉVÉNEMENTS

1 OPÉRATIONS SUR LES ÉVÉNEMENTS

Ayant traduit la notion d'événement dans la théorie des ensembles, l'interprétation des symboles logiques (cf. 1re leçon) se fait immédiatement. A chacun des opérateurs : *négation*, *disjonction*, *conjonction*, nous ferons correspondre les opérations de *complémentation*, *réunion*, *intersection*.

Événement contraire.



Si *a* **est un événement de l'univers** $\mathcal{U}$**, l'événement contraire,** noté $\overline{a}$, est *le* **complément de** *a par rapport* à $\mathcal{U}$, c'est-à-dire $\overline{a} = \mathcal{U} - a$.

Dans ces conditions :

$\overline{a}$ **est réalisé** $\Longleftrightarrow$ **a n'est pas réalisé**

Événement « ou ». Evénement « et ».

Si *a* **et** *b* **sont deux événements :**

a ∪ b sera l'événement **« a ou b »**

a ∩ b sera l'événement **« a et b »**

Alors :

$a \cup b$ **est réalisé** $\Longleftrightarrow$ *a* est réalisé ou *b* est réalisé.

$a \cup b$ **est réalisé** $\Longleftrightarrow$ l'un au moins des deux événements est réalisé.

$a \cap b$ **est réalisé** $\Longleftrightarrow$ *a* est réalisé et *b* est réalisé.

$a \cap b$ **est réalisé** $\Longleftrightarrow$ les deux événements sont réalisés simultanément.

Événements incompatibles.

Si $a \cap b = \varnothing$, l'événement $a \cap b$ est l'impossible. On dit dans ce cas, que *les deux événements* sont **incompatibles** : la réalisation de l'un exclut celle de l'autre.

Si $a \subset b$, alors la réalisation de *a* entraîne celle de *b*. En effet, d'après la définition de l'inclusion :

$$r \in a \implies r \in b.$$

EXEMPLE

Revenons à l'exemple du § 1. Considérons les deux événements **a, b** :

a : *la majorité est pour,* c'est-à-dire $a = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

b : *tout le monde n'est pas du même avis,* soit $b = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Alors :

— **l'événement contraire de a,** c'est-à-dire *la majorité est contre* est :

$$\overline{a} = \mathcal{U} - a = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

— **l'événement « la majorité est pour, sans qu'il y ait unanimité »** sera $a \cap b$:

$$a \cap b = \{5, 6, 7, 8\}$$

— **l'événement « il y a au moins une personne pour »** sera $a \cup b$:

$$a \cup b = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

2 PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES

On vérifiera très facilement (au besoin, en utilisant les diagrammes de Venn) les principales propriétés suivantes :

$\overline{\overline{a}} = a$	$\overline{\mathcal{U}} = \varnothing$
$a \cup b = b \cup a$	$a \cap b = b \cap a$
$a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$	$a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$
(1) $(a \cup b) \cap c = (a \cap c) \cup (b \cap c)$	$(a \cap b) \cup c = (a \cup c) \cap (b \cup c)$
$(a \cup b) \cap b = b$	$(a \cap b) \cup b = b$
$a \cup \overline{a} = \mathcal{U}$	$a \cap \overline{a} = \varnothing$
$a \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$	$a \cap \mathcal{U} = a$
$a \cup \varnothing = a$	$a \cap \varnothing = \varnothing$
$\overline{a \cup b} = \overline{a} \cap \overline{b}$	$\overline{a \cap b} = \overline{a} \cup \overline{b}$

Ces formules permettent d'effectuer facilement certains calculs d'événements.

EXEMPLES

1 Simplifier l'événement $(a \cap b) \cup (a \cap \bar{b})$

D'après (1) $(a \cap b) \cup (a \cap \bar{b}) = a \cap (b \cup \bar{b})$

puis $a \cap (b \cup \bar{b}) = a \cap \mathcal{U} = a$

2 Simplifier l'événement $\alpha = (a \cup b) \cap (a \cup \bar{b}) \cap (\bar{a} \cup b)$

On obtient successivement : $(a \cup b) \cap (a \cup \bar{b}) = a \cup (b \cap \bar{b}) = a \cup \varnothing$
$= a$

D'où : $\alpha = (a \cup b) \cap (a \cup \bar{b}) \cap (\bar{a} \cup b) = a \cap (\bar{a} \cup b)$
$\alpha = (a \cap \bar{a}) \cup (a \cap b)$
$\alpha = \varnothing \cup (a \cap b) = a \cap b.$

4. SIMPLEXE ET ÉVÉNEMENTS

- **Événements élémentaires.**

Si nous jetons un dé, nous pouvons nous intéresser à la valeur du point tiré. Dans ce cas, l'univers sera :

$$\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Les événements les plus simples seront de la forme $\{x\}$ où x est l'un des possibles. On les appellera *événements élémentaires.*

Il peut se faire aussi que l'on ne s'intéresse qu'à la parité du point tiré. Dans ce cas, les deux événements intéressants sont :

$$\{1, 3, 5\} \quad \text{et} \quad \{2, 4, 6\}$$

Ils constituent une partition de $\mathcal{U}$:

$$\mathcal{U} = \{1, 3, 5\} \cup \{2, 4, 6\}$$

On peut alors considérer un univers plus simple, formé de deux éléments seulement, 0 et 1 par exemple, avec :

$r = 0 \iff$ le point tiré est pair,
$r = 1 \iff$ le point tiré est impair.

Les deux événements élémentaires sont alors $\{0\}$ et $\{1\}$ à la place des deux ensembles $\{1, 3, 5\}$ et $\{2, 4, 6\}$.

Pour simplifier, nous considérerons par la suite, comme **événement élémentaire,** *tout événement de la forme* $\{x\}$, *où* x *est un élément de* $\mathcal{U}$.

• Simplexe.

Si $\mathcal{U}$ est fini et possède *n* éléments, nous savons que $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ est fini et possède 2^n éléments (cf. 11[e] leçon). Nous pouvons construire alors tous les événements de cet univers à l'aide du schéma du simplexe (cf. 8[e] leçon) :

1° sur la première génération, nous mettrons les événements élémentaires qui constituent une partition de $\mathcal{U}$;

2° sur la seconde génération, les événements formés de la réunion de deux événements élémentaires ;

. . . .

p^0 sur la *p*-ième génération, les événements formés de la réunion de *p* événements élémentaires.

• EXEMPLES

1 Univers à deux éléments.

Chaque fois que l'on s'intéresse à la réalisation ou non d'un événement donné *a*, on considérera un univers formé de deux possibles *x* et *y*, tels que :

$$\begin{cases} a \text{ est réalisé} \iff r = x \\ a \text{ n'est pas réalisé} \iff r = y \end{cases}$$

Si l'on pose $a = \{x\}$, les deux seuls événements élémentaires sont *a* et son contraire $\bar{a} = \{y\}$. On a alors :

$$\mathcal{P}(\mathcal{U}) = \{\varnothing, a, \bar{a}, \mathcal{U}\}$$

2 Univers à trois éléments.

On jette deux pièces de monnaie en l'air et l'on compte le nombre de fois où pile apparaît. Les possibles seront FF, FP, PP suivant que pile apparaît 0, 1 ou 2 fois. L'univers possède 3 éléments ; il y a donc 8 événements différents qui figurent sur le simplexe de la figure 1.

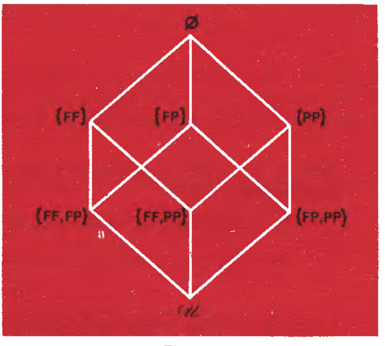


Fig. 1.

❸ Univers à quatre éléments.

Un tel univers est particulièrement intéressant, parce qu'on le rencontre chaque fois que l'on étudie la réalisation simultanée de deux événements.

Reprenons le second exemple d'univers fini donné dans le § 2. Les deux événements en cause sont la réussite ou la non-réussite de Jean et de Pierre à un concours. Nous avons vu alors que les *possibles* étaient au nombre de 4 :

$$\mathcal{U} = \{(A,A), \quad (A,R), \quad (R,A), \quad (R,R)\}$$

Il y a par conséquent $2^4 = 16$ événements différents que l'on retrouve sur le simplexe de la figure 2.

Il est intéressant de noter, sur le simplexe, la position des événements suivants :

Jean est refusé, Pierre est admis	1re génération, troisième,
Jean est admis	2e génération, premier.
l'un au moins des deux est admis	3e génération, premier.
Jean est admis ou Pierre est refusé	3e génération, deuxième.

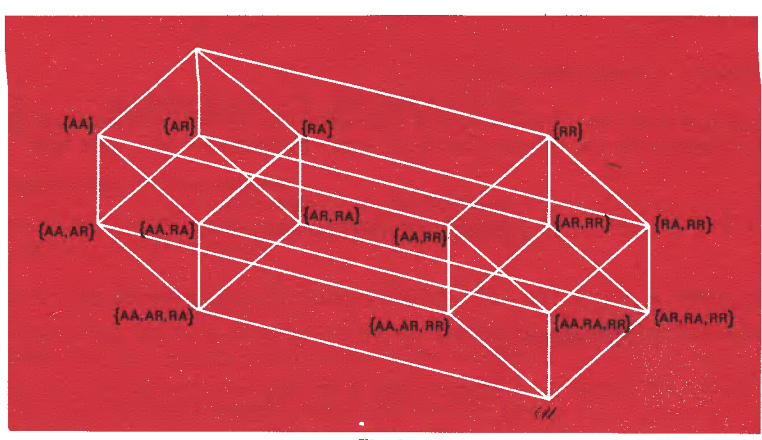


Fig. 2.

EXERCICES

22-1 Soit a, b, c, trois événements donnés d'un même univers. Les égalités suivantes sont-elles vraies :

(1) $(a \cup b) - c = a \cup (b - c)$

(2) $(a - b) - c = a - (b \cup c)$

(3) $\overline{a \cup b \cup c} = \bar{a} \cap \bar{b} \cap \bar{c}$

(4) $\overline{(a \cup b)} \cup c = \bar{a} \cap \bar{b} \cup c$

(5) $a \cup b \cup c = a \cup (b - [a \cap b)] \cup [c - (a \cap c)]$

Dans le cas où certaines égalités sont fausses, peut-on les remplacer par des inclusions ? Lesquelles ?

22-2 On pose : $a \Delta b = (a - b) \cup (b - a)$.

Démontrer que : $a \Delta b = (a \cup b) - (a \cap b)$

Démontrer que la réalisation de $a \Delta b$ est équivalente à la réalisation de l'un des deux événements a et b et d'un seul.

22-3 Soit l'univers $\mathcal{U}$ et les événements a, b, c, suivants :

$\mathcal{U} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ $\quad a = \{0, 1, 2\}$ $\quad b = \{1, 3, 5\}$ $\quad c = \{3\}$

Mettre sous la forme $r \in X$, les phrases suivantes :

1° l'un au moins des trois événements est réalisé ;

2° un, et un seul des trois, est réalisé ;

3° deux au moins, parmi les trois, sont réalisés ;

4° un, au plus, est réalisé.

22-4 On dit que (a, b, c, d) est un quaterne d'événements si :

$$c = a \cup b \quad \text{et} \quad d = a \cap b.$$

Démontrer que, si (a, b, c, d) est un quaterne d'événements et e un événement quelconque, alors $(a \cap e, b \cap e, c \cap e, d \cap e)$ est encore un quaterne d'événements.

En est-il de même de $(a \cup e, b \cup e, c \cup e, d \cup e)$? de $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{d}, \overline{c})$?

22-5 On jette une pièce de monnaie en l'air trois fois de suite. Si l'on obtient successivement *face*, *pile*, *pile*, le possible correspondant sera noté FPP.

1° Combien y a-t-il de possibles ? (On pourra tracer le diagramme séquentiel correspondant, cf. 11e leçon.)

2° Construire à l'aide des possibles, les événements suivants :

a) face apparaît au moins deux fois ;

b) face apparaît deux fois de suite exactement ;

c) on n'obtient pas deux fois de suite le même résultat.

22-6 Dans une enquête par sondage, les résultats de l'interrogatoire de chaque personne sont portés sur une carte perforée. Sur cette carte sont indiqués : le sexe, l'âge (plus de 30 ans ou moins de 30 ans), la réponse à la question posée (oui ou non). On prend une carte.

1° Combien y a-t-il de possibles ? Quel univers peut-on associer à cette épreuve ?

2° Exprimer au moyen des possibles, les événements suivants :

a) c'est un homme de moins de 30 ans ;

b) c'est une femme ;

c) c'est une personne de plus de 30 ans qui a dit oui ;

d) c'est une personne qui a dit non ou qui a moins de 30 ans.

22-7 Dans le magasin des pièces détachées (d'un garage), il y a, le mercredi matin, 5 pièces d'un certain type.

1° Construire l'arbre représentant l'évolution du stock jusqu'au jeudi soir, sachant qu'il n'y a pas de réapprovisionnement durant cette période.

2° En écrivant chaque possible sous forme d'un couple, dont la première (ou la seconde projection) indique le niveau du stock à la fin du premier jour (ou du second), construire l'univers associé.

3° Exprimer alors les événements suivants :

a) jeudi soir, il reste deux pièces en magasin ;

b) jeudi soir, il reste au plus une pièce ;

c) jeudi soir, il reste au moins une pièce et mercredi soir, il en restait au plus trois.



INDICATIONS

22-1 Utiliser des diagrammes de Venn (cf. 2e leçon) ou des Tables de vérité (cf. 1re leçon) ou les propriétés (§ 3).

Seule la première égalité est fausse. On la remplacera par une inclusion.

Par exemple, exercice (3).

Fig. 3-*a*. En couleur, le complémentaire de $a \cup b \cup c$.

Fig. 3-*b*. Hachures verticales : $\overline{a}$; hachures horizontales : $\overline{b}$; hachures obliques : $\overline{c}$. La région couverte de 3 hachures coïncide avec celle en couleur.

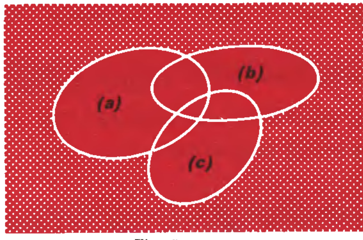
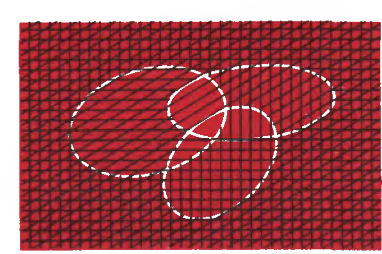


Fig. 3-*a*.


Fig. 3-*b*.

Tables de vérité :

a	b	c	$a\cup b\cup c$	$\overline{a\cup b\cup c}$	$\bar a$	$\bar b$	$\bar c$	$\bar a\cap\bar b\cap\bar c$
V	V	V	V	F	F	F	F	F
V	V	F	V	F	F	F	V	F
F	F	V	V	F	V	V	F	F
F	F	F	F	V	V	V	V	V
V	F	V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	F	V	V	F
F	V	V	V	F	V	F	F	F
F	V	F	V	F	V	F	V	F

Comparez ($\overline{a\cup b\cup c}$ ↔ $\bar a\cap\bar b\cap\bar c$)

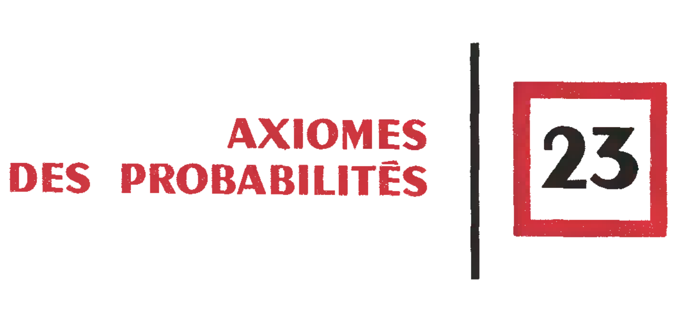
22-3 On notera que :

un au moins est $a\cup b\cup c$
deux au moins est $(a\cap b)\cup(b\cap c)\cup(c\cap a)$.

22-4 Si $c = a\cup b$, alors $\bar c = \bar a\cap\bar b$, d'où l'inversion dans le dernier quaterne.

22-6 1° Il y a 8 possibles, chacun d'eux pourra se noter par trois lettres, la première indiquant le sexe, la seconde la tranche d'âge et la troisième la réponse.
Par exemple : M, F; J, A; O, N.

2° *a*) $x \in \{(\text{M, J, O}); (\text{M, J, N})\}$.



AXIOMES DES PROBABILITÉS

23

● *Dans la leçon précédente, nous avons montré que la traduction du* **langage des événements** *était aisée dans le langage des ensembles.*

Mais cette description, bien que complète, d'un univers de possibles est insuffisante pour le but que nous nous étions proposé : pouvoir prendre une décision en toute connaissance.

Il s'agit maintenant de **classer** *les possibles, séparer le certain de l'incertain et mieux encore, essayer d'***ordonner les incertitudes.** *Ensuite, il pourra être envisagé de « choisir » ses actes.*

● *Il est clair que, pour classer les événements d'un même univers, le plus simple est d'associer à chacun d'eux un nombre. Quel nombre? Comment le définir? A quelles relations doivent satisfaire les nombres choisis? Autant de questions auxquelles répondent les* **axiomes** *(ou* **principes***)* **des probabilités.** *Bien entendu, nous commencerons par présenter un exemple dont nous avons une connaissance suffisante, bien qu'imparfaite, pour nous permettre de dégager quelques principes qu'il serait souhaitable de poser comme axiomes.*

● *Ainsi le plan de cette leçon sera le suivant :*

— *après l'étude d'un exemple, nous* **probabiliserons** *les événements d'un même univers en affectant à chacun d'eux un « nombre », sa* **probabilité***;*

— *ces nombres satisferont, par axiomes, à diverses relations.*

Nous constaterons alors que le **modèle** *construit rend bien compte de nos « impressions intuitives » sur les « degrés de certitude » de chaque événement.*

● *Nous terminerons cette très importante leçon en traitant complètement plusieurs exemples.*

PREMIER AXIOME DES PROBABILITÉS

1. EXEMPLE

• **Expérience préalable.**

Considérons une **épreuve aléatoire,** c'est-à-dire une épreuve dont le résultat ne peut être prévu à l'avance et que l'on peut répéter un grand nombre de fois.

Une des plus commodes à ce point de vue est celle qui consiste à jeter un dé et à noter le « point » apparu. L'univers correspondant est alors :

$$\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Sur un grand nombre d'épreuves (1 000 par exemple), nous constatons que les événements élémentaires ont sensiblement la même fréquence de réalisation. Par exemple $\{1\}$ se trouve réalisé à peu près une fois sur six.

D'autres événements se trouvent réalisés plus fréquemment. Ainsi $\{1, 3, 5\}$ (c'est-à-dire le point tiré est impair) est réalisé en moyenne une fois sur deux.

• **Ce que nous voulons construire.**

Nous nous proposons d'attacher, à chaque événement d'un univers donné, un nombre positif : sa **probabilité,** nombre qui sera d'autant plus grand que l'événement se produira en moyenne plus souvent.

Si ce nombre est la fréquence de réalisation, à l'un des événements élémentaires précédents, on peut attacher la probabilité $\frac{1}{6}$. Dans ces conditions, à un événement qui se réalise nécessairement à chaque épreuve, c'est-à-dire au certain, correspondra une probabilité égale à 1, à l'impossible correspondra une probabilité égale à 0.

De plus, si nous considérons deux événements incompatibles tels que $\{1, 3\}$ et $\{2\}$ dont les fréquences de réalisation sont respectivement $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{6}$, la réunion des deux aura une fréquence de réalisation qui est la somme des deux fréquences $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{6}$, soit $\frac{1}{2}$. La probabilité d'une réunion de deux événements incompatibles doit donc être la somme des probabilités des événements composants.

Ces considérations nous montrent que les probabilités doivent répondre à un certain nombre de conditions préalables. Ce sont ces conditions qui portent le nom d'axiomes des probabilités.

2. PROBABILITÉ ET MESURE

• Définition d'une probabilité.

Soit $\mathcal{U}$ un univers et P une application de $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ dans $\mathbb{R}^+$: cette application fait donc correspondre à tout événement, un nombre réel positif ou nul (fig. 1).

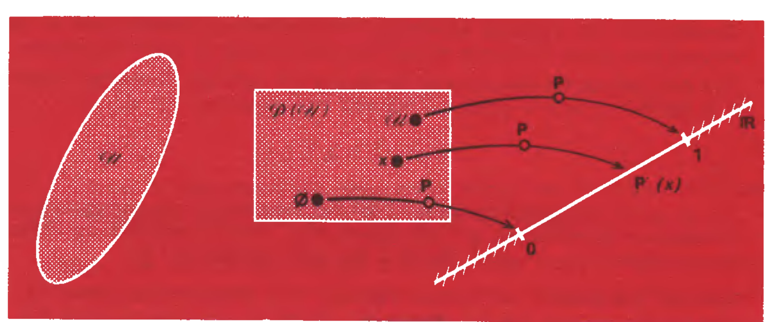


Fig. 1.



Nous dirons qu'une *telle application est une* **probabilité** si *les conditions suivantes sont vérifiées* :

1. $P(\mathcal{U}) = 1$

2. $a \subset \mathcal{U} \quad b \subset \mathcal{U} \quad a \cap b = \emptyset \implies P(a \cup b) = P(a) + P(b)$

Nous avons mis en forme les conditions trouvées intuitivement dans le paragraphe précédent, à savoir :

a) *la probabilité d'un événement est un nombre positif ou nul* ;

b) *la probabilité du certain est* 1 ;

c) *la probabilité de la réunion de deux événements incompatibles est la somme des probabilités de ces deux événements.*

Cette dernière condition porte le nom d'**axiome des probabilités totales.**

- **Notion de mesure.**

Il se trouve que de nombreuses applications d'une famille d'ensembles dans $\mathbb{R}^+$ vérifient la dernière des conditions précédentes.

Par exemple, si A est un ensemble fini, l'application de $\mathfrak{P}(A)$ dans $\mathbb{N}$, qui à tout sous-ensemble de A fait correspondre son nombre cardinal, vérifie (cf. 9e leçon) :

$$a \subset A \quad b \subset A \quad a \cap b = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \text{Card}\,(a \cup b) = \text{Card}\,(a) + \text{Card}\,(b)$$

Par définition, toute application m d'une famille $\mathfrak{F}$ d'ensembles, dans $\mathbb{R}^+$ est une mesure si :

$$a \in \mathfrak{F} \quad b \in \mathfrak{F} \quad a \cup b \in \mathfrak{F} \quad a \cap b = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad m(a \cup b) = m(a) + m(b)$$

Sur l'ensemble des parties d'un ensemble fini, l'application $a \mapsto \text{Card}\,(a)$ est une mesure.

Entrent dans cette catégorie d'applications : les longueurs, les aires, les volumes.

Le principe des probabilités totales est donc l'affirmation qu'une probabilité est une mesure sur l'ensemble des événements. Et c'est parce que la probabilité est une mesure que nous retrouverons (§ 3) les propriétés communes à toutes les mesures, en particulier à *Card* (cf. 9e leçon).

3. PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DES PROBABILITÉS

- **Événements contraires.**

THÉORÈME

La somme des probabilités de deux événements contraires est égale à 1.

Si $\bar{a}$ est l'événement contraire de a, alors : $a \cup \bar{a} = \mathcal{U}$ et $a \cap \bar{a} = \emptyset$.



Appliquons à $(a \cup \bar{a})$, l'axiome des probabilités totales :

$$P(a \cup \bar{a}) = P(a) + P(\bar{a}) = P(\mathcal{U}) = 1$$

Donc : $$P(\bar{a}) = 1 - P(a)$$

En particulier $\emptyset = \bar{\mathcal{U}}$, donc $P(\emptyset) = 0$

• **Extension de la formule des probabilités totales.**

Si a, b, c sont trois événements incompatibles deux à deux, alors :

$$\mathbf{P(a \cup b \cup c) = P(a \cup b) + P(c) = P(a) + P(b) + P(c)}$$

Il suffit pour cela de remarquer que :

$$a \cap c = \emptyset \quad \text{et} \quad b \cap c = \emptyset \Longrightarrow (a \cup b) \cap c = \emptyset.$$

Cette formule s'étend facilement à une réunion, en nombre fini quelconque, d'événements, à condition que les événements soient incompatibles deux à deux.

• **Probabilité d'une réunion.**

Soient a et b deux événements quelconques, non nécessairement incompatibles. La réunion des deux événements peut se mettre sous la forme d'une réunion de trois événements incompatibles deux à deux (fig. 2) :

$$a \cup b = (a - b) \cup (a \cap b) \cup (b - a)$$

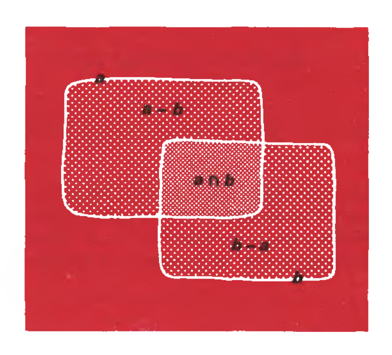


Fig. 2.

2

THÉORÈME. Quels que soient les événements a et b :

$$\mathbf{P(a \cup b) = P(a) + P(b) - P(a \cap b)}$$

D'après la formule précédente :

$$P(a \cup b) = P(a - b) + P(a \cap b) + P(b - a).$$

D'autre part :

$$a = (a - b) \cup (a \cap b) \quad \text{et} \quad b = (b - a) \cup (a \cap b)$$

Ceci nous permet d'évaluer les probabilités de $(a - b)$ et de $(b - a)$ en fonction des probabilités de a, de b et de $(a \cup b)$:

$$P(a - b) = P(a) - P(a \cap b)$$
$$P(b - a) = P(b) - P(a \cap b)$$

En reportant dans la formule donnant $P(a \cup b)$, on obtient le résultat.

REMARQUES

1. Il est possible de rapprocher cette formule de celle qui a été établie à propos des cardinaux d'ensembles finis (cf. 9e leçon) :

$$\text{Card}(a \cup b) + \text{Card}(a \cap b) = \text{Card}(a) + \text{Card}(b)$$

Cette formule est valable pour toutes les mesures.

2. Dans le cas où les événements sont incompatibles, $P(a \cap b) = 0$ et l'on retrouve l'axiome des probabilités totales.

3. **Cas de a ⊂ b.**

Si a et b sont deux événements tels que $a \subset b$, alors :

$$b = a \cup (b - a) \quad \text{et} \quad a \cap (b - a) = \varnothing$$

L'axiome des probabilités totales s'écrit :

$$P(b) = P(a) + P(b - a)$$

Puisque $P(b - a) \geqslant 0$, on en déduit : $P(a) \leqslant P(b)$, d'où le **théorème** :

$$\boxed{a \subset b} \implies \boxed{P(a) \leqslant P(b)}$$

Ce qui s'énonce : **si la réalisation de a entraîne celle de b, la probabilité de a est au plus égale à celle de b.**

4. PROBABILITÉ SUR UN UNIVERS FINI

• Construction d'une probabilité.

Soit $\mathcal{U} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un univers fini dont les événements élémentaires seront notés a_i, avec $a_i = \{x_i\}$.

Pour définir une probabilité sur $\mathfrak{P}(\mathcal{U})$, il faut évidemment connaître les probabilités attachées aux événements élémentaires.

Posons : $$P(a_i) = p_i$$

Tous les événements élémentaires sont incompatibles deux à deux.
De plus, leur réunion est $\mathcal{U}$:

$$\mathcal{U} = a_1 \cup a_2 \cup a_3 \ldots\ldots \cup a_n$$

Il en résulte que :

$$P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_n) = P(\mathcal{U}) = 1$$

ce que l'on note encore, en posant $p_i = P(a_i)$:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Les nombres p_i devront donc être des nombres positifs, dont la somme est 1. Alors, tout événement étant la réunion d'événements élémentaires, sa probabilité sera la somme des probabilités des événements composants.
Si, par exemple : $b = a_1 \cup a_2 \cup a_3$, alors :

$$P(b) = p_1 + p_2 + p_3$$

• Événements équiprobables.

Un cas particulier simple de probabilité sur un univers fini est obtenu en attribuant à chaque événement élémentaire, la même probabilité. On dit alors que les *événements sont équiprobables.*

S'il y a n événements élémentaires, alors la probabilité de chacun d'eux est $\frac{1}{n}$.

Ce cas se présente lorsqu'il n'y a aucune raison d'attribuer *a priori* des probabilités différentes aux événements élémentaires.

EXEMPLE

On jette un dé : toutes les faces ont théoriquement la même probabilité de sortie, qui est $\frac{1}{6}$. On est bien en accord avec la notion expérimentale de fréquence.

• Choix au hasard.

Il faut rapprocher de la notion d'événements équiprobables celle de choix au hasard. Lorsque l'on choisit un élément dans un ensemble fini, on exprime le fait que tous les éléments ont la même probabilité d'être choisis, en disant que le *choix est fait au hasard.*

EXEMPLES

1. On choisit au hasard un entier de 0 à 9. La probabilité de choisir 3 est $\frac{1}{10}$.

2. On choisit au hasard une carte dans un jeu de 32. La probabilité de tirer l'as de cœur est $\frac{1}{32}$.

● **Conséquence.**

Dans le cas des *événements élémentaires* **équiprobables,** et uniquement dans ce cas, une règle simple permet d'obtenir la probabilité d'un événement quelconque :

s'il y a *n* possibles et si *p* d'entre eux sont favorables à la réalisation de *a*, alors :

$$P(a) = \frac{p}{n}$$

En effet, chaque événement élémentaire a une probabilité égale à $\frac{1}{n}$ et l'événement *a* est formé de *p* possibles.

On retrouve ainsi une définition courante, mais de laquelle il faut se méfier car elle risque de conduire à des erreurs :

$$P(a) = \frac{\text{Nombre des cas favorables}}{\text{Nombre total des cas possibles}}$$

5. ÉTUDE D'UN EXEMPLE

1° Les données du problème.

On demande à 250 personnes, 50 cadres et 200 employés d'une entreprise, si elles sont favorables ou non à la journée continue. Le dépouillement des réponses montre que 30 cadres et 80 employés sont favorables, les autres personnes étant contre.

Parmi les 250 cartes contenant les réponses, on en choisit une au hasard. Il y a 4 possibles que l'on notera CF, CN, EF, EN, suivant qu'il s'agira d'un cadre favorable ou non, d'un employé favorable ou non, à la journée continue.

Sur les 250 choix possibles équiprobables, 30 conduisent au tirage de la carte d'un cadre dont la réponse est favorable. La probabilité d'un tel tirage est donc :

$$\frac{30}{250} = 0{,}12.$$

On trouve de même pour les trois autres cas, respectivement :

$$\frac{20}{250} = 0{,}08 \qquad \frac{80}{250} = 0{,}32 \qquad \frac{120}{250} = 0{,}48$$

Si nous posons $\mathcal{U} = \{CF, CN, EF, EN\}$, alors les considérations précédentes permettent de définir une probabilité sur $\mathcal{P}(\mathcal{U})$. *Nous nous proposons de construire systématiquement toutes les probabilités des événements de cet univers.*

2° Probabilisation par le simplexe.

• L'univers étant à 4 éléments, tous les événements, au nombre de 16, peuvent se représenter sur un simplexe S_4 (fig. 3). A côté de chaque événement figure sa probabilité ; en particulier, sur la première génération figurent les 4 nombres trouvés précédemment.

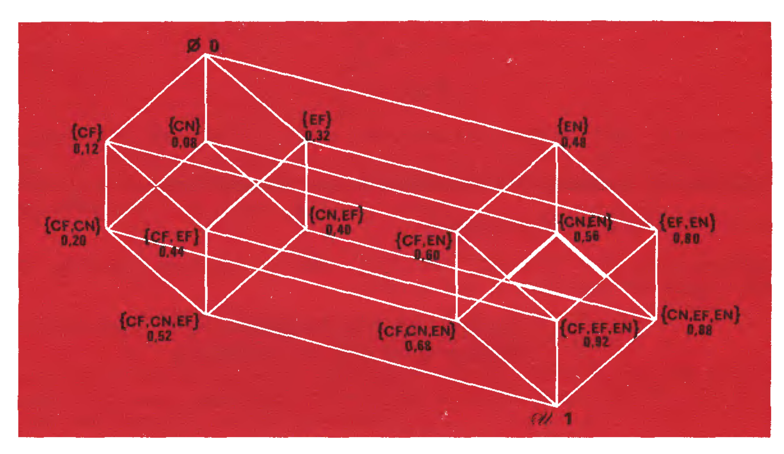


Fig. 3.

• Pour un événement quelconque, la probabilité est la somme des probabilités des événements élémentaires dont il est la réunion. Par exemple :

$$P(\{CF, CN, EN\}) = 0{,}12 + 0{,}08 + 0{,}48 = 0{,}68$$

• La détermination de toutes ces probabilités peut se faire suivant une règle simple. A chacun des événements élémentaires correspond sur le simplexe un vecteur. A chacun de ces vecteurs nous attacherons un nombre : la probabilité de l'événement élémentaire correspondant.

Si a est un événement quelconque, on va de $\varnothing$ à a sur le simplexe en suivant un trajet formé de la somme de plusieurs vecteurs. La probabilité de a est alors la somme des nombres attachés aux vecteurs constituant le trajet.

3° Recherche de quelques probabilités.

Soient a et b les deux événements suivants :

a : *la personne interrogée est un cadre* ;
b : *la personne interrogée est favorable à la journée continue.*

Alors : $a = \{CF, CN\}$ et $b = \{CF, EF\}$,

avec : $P(a) = 0{,}20$ et $P(b) = 0{,}44$

Par suite : $P(a \cap b) = P(\{CF\}) = 0{,}12$

Donc $P(a \cup b) = P(a) + P(b) - P(a \cap b)$

$= 0{,}20 + 0{,}44 - 0{,}12 = 0{,}52.$

SECOND AXIOME DES PROBABILITÉS

6. PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

• ÉNONCÉ DE L'AXIOME

Soit deux événements a et b. La réalisation de a est un supplément d'information qui peut modifier ou non la probabilité de b.

Nous appellerons alors **probabilité conditionnelle de b sous l'hypothèse a, ou sachant a,** *la probabilité de réalisation de* b *lorsque l'on sait que* a *est réalisé.*

Cette probabilité sera notée : $P_a(b)$ ou $P(b/a)$.

Le second axiome fondamental du calcul des probabilités est le suivant, appelé **axiome des probabilités conditionnelles :**



$$\text{si} \quad \mathbf{P(a) \neq 0} \quad \text{alors} \quad \mathbf{P_a(b) = \frac{P(a \cap b)}{P(a)}}$$

L'axiome des probabilités conditionnelles peut s'écrire sous la forme suivante :

$$P(a \cap b) = P(a) \,.\, P_a(b).$$

Par raison de symétrie, on a également :

$$P(a \cap b) = P(a) \,.\, P_a(b) = P(b) \,.\, P_b(a).$$

EXEMPLE

Revenons au problème étudié dans le paragraphe précédent, avec les deux événements :

- a : *la personne interrogée est un cadre* ;
- b : *la personne est favorable à la journée continue.*

Choisissons une carte au hasard dans l'ensemble des 250. Nous savons que :

$$P(b) = 0{,}44.$$

Supposons de plus que a soit réalisé. Alors :

$$P_a(b) = \frac{P(a \cap b)}{P(a)} = \frac{0{,}12}{0{,}20} = 0{,}60.$$

Ce résultat s'obtient d'ailleurs facilement dans ce cas. On sait que a est réalisé, donc le tirage s'est fait parmi les 50 cartes correspondant aux 50 cadres. Comme 30 d'entre eux sont favorables, la probabilité de choisir une personne ayant cette opinion est $\frac{30}{50} = 0{,}6$.

PROPRIÉTÉS

Soit P une probabilité définie sur $\mathfrak{T}(\mathfrak{U})$ et a un événement de probabilité non nulle. Définissons une nouvelle application de $\mathfrak{T}(\mathfrak{U})$ dans $\mathbb{R}^+$, application notée P_a et telle que :

$$b \in \mathfrak{T}(\mathfrak{U}) \xrightarrow{P_a} P_a(b) = \frac{P(a \cap b)}{P(a)}$$

Posons-nous la question : P_a *est-elle encore une probabilité ?*

Pour répondre, il suffit de vérifier que les deux conditions de la définition (§ 2) sont remplies.

1° $P_a(\mathfrak{U}) = 1$? En effet : $P_a(\mathfrak{U}) = \dfrac{P(a \cap \mathfrak{U})}{P(a)} = \dfrac{P(a)}{P(a)} = 1.$

2° *Si* $b \cap c = = \varnothing$, *a-t-on* $P_a(b \cup c) = P_a(b) + P_a(c)$?

Or $$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$$

et par suite : $$P_a(b \cup c) = \frac{P(a \cap (b \cup c))}{P(a)} = \frac{P(a \cap b)}{P(a)} + \frac{P(a \cap c)}{P(a)}$$

Puisque $b \cap c = \varnothing$ implique $(a \cap b) \cap (a \cap c) = \varnothing$,

alors $$P(a \cap (b \cup c)) = P(a \cap b) + P(a \cap c)$$

Donc : $$P_a(b \cup c) = P_a(b) + P_a(c).$$

Il en résulte que P_a est bien une probabilité (§ 2).

EXEMPLE

Dans un jeu de 32 cartes, on tire au hasard deux cartes. Quelle est la probabilité pour que les deux cartes soient des as ?

Soit les événements a et b
- a : *la première carte tirée est un as ;*
- b : *la seconde carte tirée est un as.*

Alors : $P(a) = \dfrac{4}{32}$. La première carte tirée étant un as, il reste pour le second tirage 31 cartes dont 3 sont des as. Donc :

$$P_a(b) = \frac{3}{31} \quad \text{et} \quad P(a \cap b) = \frac{4 \cdot 3}{32 \cdot 31}, \quad \text{soit} \quad P(a \cap b) = \frac{3}{248} \approx 0{,}012.$$

7. INDÉPENDANCE EN PROBABILITÉ

• Cas de deux événements.

Soit P une probabilité définie sur $\mathfrak{P}(\mathfrak{U})$ et a, b deux événements quelconques. Il peut se faire que la réalisation de a ne modifie en rien la probabilité de b. Nous dirons alors que, *relativement à cette probabilité*, b **est indépendant de** a. *Dans ces conditions :*

$$P(b) = P_a(b) = \frac{P(a \cap b)}{P(a)} \iff P(a \cap b) = P(a) \cdot P(b)$$

Il en résulte immédiatement l'indépendance de a *par rapport à* b.

En effet :
$$P(a) = \frac{P(a \cap b)}{P(b)} = P_b(a).$$



Nous dirons alors que **les deux événements a et b sont indépendants.**

Donc : a et b sont indépendants $\iff$ $P(a \cap b) = P(a) \cdot P(b)$.

EXEMPLE

Revenons encore au problème étudié au paragraphe précédent. Nous avons vu que les deux événements :

- a : *la personne interrogée est un cadre ;*
- b : *la personne interrogée est favorable à la journée continue ;*

n'étaient pas indépendants puisque $P(b) \neq P_a(b)$.

Combien doit-il y avoir d'employés favorables à la journée continue pour que les deux événements soient indépendants ?

Soit n ce nombre. Alors : $P(b) = \dfrac{30 + n}{250}$

Puisque $P_a(b)$ est inchangé :

$$a \text{ et } b \text{ sont indépendants} \iff 0{,}60 = \frac{30 + n}{250}$$

Donc $n = 120$

Dans les deux catégories, les proportions de personnes pour ou contre la journée continue sont les mêmes.

● **Cas général.**

Dans le cas de plus de deux événements, on dit qu'ils sont **indépendants**, *si l'intersection d'un nombre quelconque d'entre eux a une probabilité égale au produit des probabilités de chacun d'eux.*

Par exemple, trois événements a, b et c sont indépendants si :

$$P(a \cap b) = P(a) \cdot P(b)$$
$$P(c \cap a) = P(c) \cdot P(a)$$

et

$$P(b \cap c) = P(b) \cdot P(c)$$
$$P(a \cap b \cap c) = P(a) \cdot P(b) \cdot P(c)$$

8. SCHÉMAS DE TIRAGES PROBABILISTES

1° Définition.

● On a souvent besoin, en Statistique, de prélever au hasard un échantillon dans une population donnée. Pour obtenir cet échantillon, deux méthodes sont possibles :

— On prélève l'échantillon en bloc, ou, ce qui revient au même, on choisit les éléments successivement, de telle sorte qu'un élément choisi ne participe plus aux tirages ultérieurs.

— On choisit successivement chaque élément dans la totalité de la population, ce qui fait qu'un élément peut être choisi plusieurs fois.

● *Il* est possible de schématiser des tirages de la façon suivante :

la population est assimilée à un ensemble de boules contenues dans une urne. Le prélèvement de l'échantillon se fait alors de l'une ou l'autre des deux manières suivantes,

— **Tirages sans remise, ou exhaustifs.** Les boules sont tirées en bloc ou les unes après les autres, sans remise dans l'urne après tirage.

— **Tirages avec remise, ou bernoullien.** Les boules sont extraites de l'urne les unes après les autres, chaque boule tirée étant remise dans l'urne après le tirage et participant de cette façon aux tirages suivants.

● Dans les deux cas, on suppose la population partagée en deux catégories.

Si N est le nombre total de boules, les effectifs de chacune des deux catégories seront N_1 et N_2 avec $N_1 + N_2 = N$.

On se propose alors d'évaluer, suivant la nature du tirage, la probabilité d'obtenir un échantillon de composition donnée. Sachant que l'échantillon est de taille n, on désignera par $P(n_1, n_2)$ la probabilité d'obtenir un échantillon renfermant n_1 boules de la première catégorie et n_2 boules de la seconde (avec $n_1 + n_2 = n$).

2° Tirages exhaustifs.

- Dans le cas des tirages exhaustifs, on a nécessairement :

$$n_1 \leqslant N_1 \quad \text{et} \quad n_2 \leqslant N_2 \quad \text{ce qui entraîne} \quad n \leqslant N.$$

- *On suppose que les tirages des échantillons de même taille* n *sont équiprobables* (choix au hasard).

Le nombre total d'échantillons de taille n est C_N^n, nombre de combinaisons de n éléments pris parmi N (cf. 11ᵉ leçon). Par ailleurs, le nombre des échantillons ayant la même composition (n_1, n_2) est :

$$C_{N_1}^{n_1} \cdot C_{N_2}^{n_2}$$

Il en résulte *la formule des tirages exhaustifs :*

$$P(n_1, n_2) = \frac{C_{N_2}^{n_2} \cdot C_{N_1}^{n_1}}{C_N^n}$$

EXEMPLE

On extrait 3 cartes d'un jeu de 32. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 2 as ?

La probabilité d'avoir « exactement » 2 as est :

$$\frac{C_4 \cdot C_{28}^1}{C_{32}^3} = \frac{42}{1\,240}$$

Celle d'avoir 3 as est :

$$\frac{C_4^3}{C_{32}^3} = \frac{1}{1\,240}$$

Il en résulte (§ 2) que la probabilité d'avoir au moins 2 as est :

$$\frac{1}{1\,240} + \frac{42}{1\,240} = \frac{43}{1\,240}$$

3° Tirages bernoulliens.

- Dans le cas des tirages bernoulliens, il n'y a aucune limite concernant la taille de l'échantillon ou sa composition. On suppose seulement qu'à chaque tirage la probabilité de tirer une boule est constante et que, de plus, les tirages sont mutuellement indépendants.

Dans ces conditions, la probabilité de tirer une boule de la première catégorie et la probabilité de tirer une boule de la deuxième catégorie sont respectivement :

$$p = \frac{N_1}{N} \quad \text{et} \quad q = 1 - p = \frac{N_2}{N}$$

- Désignons par a_n et b_n les événements suivants :

a_n : « la n^{ieme} boule tirée est de la première catégorie »;
b_n : « la n^{ieme} boule tirée est de la deuxième catégorie ».

Alors, quel que soit le rang n du tirage :

$$P(a_n) = p \quad \text{et} \quad P(b_n) = q$$

- De plus, l'indépendance des tirages se traduit par le fait que la probabilité d'obtenir une suite donnée de résultats est égale au produit des probabilités des tirages correspondants.

Par exemple :

$$P(a_1 \cap b_2 \cap b_3 \cap a_4 \cap a_5) = p \cdot q \cdot q \cdot p \cdot p = p^3 \cdot q^2$$

Il résulte de ceci que, *tous les échantillons de taille* n, *ayant la même composition* (n_1 boules de la première catégorie, n_2 boules de la seconde) *ont la même probabilité de tirage*, à savoir :

$$p^{n_1} \cdot q^{n_2}$$

quel que soit l'ordre dans lequel les boules ont été obtenues.

Or le nombre de façons *différentes* d'arriver à un échantillon ayant la même composition (n_1, n_2) est égal au nombre de façons de choisir n_1 éléments parmi n ($n = n_1 + n_2$). Par conséquent, *la probabilité d'obtenir* k *boules de la première catégorie dans un échantillon de taille* n *est* :

$$P(k, n - k) = C_n^k p^k \cdot q^{n-k}$$

9. EXERCICES RÉSOLUS

PREMIER EXEMPLE

Dans une classe, il y a 30 élèves : 20 apprennent l'anglais, 12 l'espagnol et 6 les deux langues. On choisit au hasard un élève dans la classe. Soient *a* et *b* les deux événements suivants :

a : l'élève choisi apprend l'anglais,
b : l'élève choisi apprend l'espagnol.

1° Déterminer les probabilités des événements suivants :

$$a \quad b \quad a \cap b \quad a \cup b \quad \overline{a} \cup b$$

2° Calculer les probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_a(b) \qquad P_{a \cup b}(b) \qquad P_{\bar b}(a).$$

❶ Pour les trois premières probabilités, on obtient immédiatement :

$$P(a) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}, \qquad P(b) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5} \qquad \text{et} \qquad P(a \cap b) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}.$$

On en déduit alors (§ 3) : $P(a \cup b) = P(a) + P(b) - P(a \cap b) = \frac{13}{15}$

Pour calculer la probabilité de $\bar a \cup b$ on peut d'abord chercher celle de l'événement contraire qui est $a \cap \bar b$. Il y a évidemment $20 - 6 = 14$ élèves qui apprennent l'anglais sans apprendre l'espagnol, donc :

$$P(a \cap \bar b)\ \frac{7}{15} = \qquad \text{et} \qquad P(\bar a \cup b) = 1 - P(a \cap \bar b) = \frac{8}{15}.$$

❷ Les probabilités conditionnelles se calculent en utilisant la formule :

$$P_a(b) = \frac{P(a \cap b)}{P(a)}$$

D'où :

$$P_a(b) = \frac{1}{5} : \frac{2}{3} = \frac{3}{10}$$

$$P_{a \cup b}(b) = \frac{P(a \cup b) \cap b)}{P(a \cup b)} = \frac{P(b)}{P(a \cup b)} = \frac{2}{5} \times \frac{15}{13} = \frac{6}{13}$$

$$P_{\bar b}(a) = \frac{P(a \cap \bar b)}{P(\bar b)} = \frac{7}{15} : \frac{3}{5} = \frac{7}{9}.$$

• DEUXIÈME EXEMPLE.

Une étude de marché faite par un constructeur d'automobiles montre que, sur 100 personnes désireuses de changer de voiture dans l'année, 20 possèdent déjà une voiture de sa marque. Sur 100 personnes possédant une voiture de la marque, 40 désirent changer de marque. Sur 100 personnes ne possédant pas de voiture de cette marque, 15 désirent en acheter une.

❶ *Quelle est la probabilité pour qu'une personne désirant changer de voiture, achète une voiture de la marque ?*

❷ *Quelle est la probabilité pour qu'une personne qui vient d'acheter une voiture de la marque l'ait changée contre une voiture de marque différente ?*

— Désignons par a et b les deux événements suivants :

- a : « la personne possède déjà une voiture de la marque » ;
- b : « la personne achète une voiture de la marque ».

Nous connaissons : $P(a) = 0{,}20$ $\quad P_a(b) = 0{,}6$ $\quad$ et $\quad P_{\bar a}(b) = 0{,}15$.

— **Nous nous proposons de calculer $P(b)$ et $P_b(\bar{a})$.** Nous pouvons pour cela nous servir de l'arbre traduisant les diverses possibilités (fig. 4) sur lequel figurent les probabilités correspondantes. La probabilité de l'événement correspondant à l'un des trajets sur l'arbre est le produit des probabilités rencontrées sur le trajet.

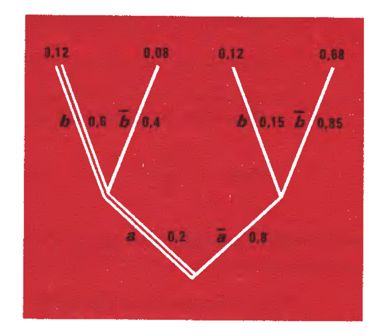


Fig. 4.

Par exemple, le trajet figuré en trait double correspond à $a \cap b$: « la personne possède une voiture de la marque et la change contre une voiture de la même marque ». Sur le trajet figurent les probabilités :

$$P(a) = 0,2 \qquad \text{et} \qquad P_a(b) = 0,6$$

— **Calcul de P(b).**

$$P(a \cap b) = P(a).P_a(b) = 0,2 \times 0,6 = 0,12$$

Puisque $$b = (a \cap b) \cup (\bar{a} \cap b),$$

on en déduit : $$P(b) = 0,12 + 0,12 = 0,24.$$

— **Calcul de $P_b(\bar{a})$.**

Cette probabilité est donnée par la formule :

$$P_b(\bar{a}) = \frac{P(b \cap \bar{a})}{P(b)}$$

Sur la figure 4, on a : $$P(b \cap \bar{a}) = P(\bar{a} \cap b) = 0,12.$$

Donc : $$P_b(a) = \frac{0,12}{0,24} = 0,5.$$

• TROISIÈME EXEMPLE.

Dans un atelier fonctionnent 10 machines identiques. La probabilité pour que l'une quelconque d'entre elles tombe en panne dans la journée est 0,1. Les pannes étant indépendantes les unes des autres, déterminer les probabilités des événements suivants :

1 *Aucune panne ne s'est produite dans la journée ;*

2 *Il s'est produit au moins une panne ;*

1 *Il s'est produit exactement une panne ;*

4 *Il s'est produit exactement deux pannes ;*

1 *Il s'est produit deux pannes sachant qu'il y en a eu au moins une.*

— On notera au préalable que les formules donnant les probabilités des événements suivants « il s'est produit exactement k pannes dans la journée » sont celles des tirages bernoulliens. En effet, si l'on choisit k machines, la probabilité pour qu'elles tombent toutes en panne, les autres fonctionnant correctement est :

$$(0,1)^k \cdot (0,9)^{10-k}.$$

Comme il y a C_{10}^k façons différentes de choisir k machines parmi 10, la probabilité de l'événement considéré est : $C_{10}^k \cdot (0,1)^k \cdot (0,9)^{10-k}$.
Il en résulte que :

❶ *Aucune panne ne s'est produite :*

$$\text{probabilité} = C_{10}^0 \cdot (0,9)^{10} = 0{,}356$$

❷ *Il s'est produit au moins une panne*, événement contraire du précédent :

$$\text{probabilité} = 1 - 0{,}356 = 0{,}644$$

❸ *Il s'est produit exactement une panne :*

$$\text{probabilité} = C_{10}^0 \cdot (0,1) \cdot (0,9)^9 = 0{,}385$$

❹ *Il s'est produit exactement deux pannes :*

$$\text{probabilité} = C_{10}^1 \cdot (0,1)^2 \cdot (0,9)^8 = 0{,}192$$

❺ *Il s'est produit exactement deux pannes sachant qu'il y en a eu au moins une.*

Si a est le premier des événements et b le second : $P_b(a) = \dfrac{P(a \cap b)}{P(b)}$.

Or, la réalisation de a entraîne celle de b, donc :

$$a \subset b \quad \text{et} \quad a \cap b = a$$

Par conséquent : $P_b(a) = \dfrac{P(a)}{P(b)} = \dfrac{0{,}192}{0{,}644} = 0{,}335.$



EXERCICES

23-1 On jette deux dés. Déterminer les probabilités des événements suivants :

1° la somme des points obtenus est strictement inférieure à 8 ;

2° la somme des points obtenus est divisible par 3 ;

3° la somme des points obtenus est strictement inférieure à 8 et divisible par 3 ;

4° la somme des points obtenus est strictement inférieure à 8 ou divisible par 3.

23-2 On jette trois dés A, B, C. Si a, b, c, sont respectivement les points obtenus sur chaque dé, on forme l'équation :

$$a x^2 + b x + c = 0.$$

Déterminer les probabilités des événements suivants :

1° -1 est racine de l'équation ;

2° les deux racines sont entières ;

3° les deux racines sont rationnelles ;

4° les deux racines sont réelles.

Comparer *a priori* ces trois dernières probabilités.

23-3 On donne deux événements a et b tels que : $P(a) = 0{,}6$ et $P(b) = 0{,}4$.

Calculer $P(a \cup b)$ dans les trois cas suivants :

1° a et b sont incompatibles ;

2° la réalisation de b entraîne celle de a ;

3° a et b sont indépendants.

23-4 Soient deux événements a et b tels que : $P(a \cup b) = 0{,}8$ et $P(a \cap b) = 0{,}15$.

1° Entre quelles limites peut varier $P(a)$?

2° Calculer $P(a)$ et $P(b)$ si les deux événements sont indépendants.

23-5 On interroge 100 personnes réparties en trois catégories I, II et III. Les réponses à la question posée sont : satisfait, mécontent ou indifférent. Les résultats de l'enquête sont portés dans le tableau ci-contre.

On choisit au hasard une personne parmi les 100. Si X est la personne choisie, déterminer les probabilités des événements suivants :

	Sat.	Méc.	Ind.
I	15	10	5
II	25	10	5
III	10	10	10

1° $X \in I$;

2° X est satisfait ;

3° $X \in II$ et X n'est pas satisfait ;

4° $X \in II$ sachant que X est mécontent ;

5° X est mécontent sachant qu'il n'est pas satisfait et qu'il n'appartient pas à la première catégorie ;

6° $X \in I$ ou n'est pas indifférent.

23-6 Soit trois événements a, b, c, et une probabilité P telle que :

$$P(a) = 0{,}4 \qquad P(b) = 0{,}5 \qquad P(c) = 0{,}7$$

$$P(b \cap c) = 0{,}3 \qquad P(c \cap a) = 0{,}2 \qquad P(a \cap b) = 0{,}2$$

$$P(a \cap b \cap c) = 0{,}1.$$

1° A l'aide d'un diagramme de Venn, déterminer les probabilités de tous les événements de la forme $i \cap j \cap k$ où i, j, k sont respectivement a ou $\bar{a}$, b ou $\bar{b}$, c ou $\bar{c}$.

2° Déterminer les probabilités des événements suivants :

a) $a \cup b \cup c$ (c'est-à-dire l'un au moins des événements est réalisé);

b) $(a \cap b) \cup (b \cap c) \cup (c \cap a)$ (c'est-à-dire deux des événements au moins sont réalisés).

3° Déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :

a) $P_a(b \cup c)$;

b) $P_{a \cup b \cup c}(a \cap b \cap c)$.

23-7 A l'issue d'un sondage statistique portant sur le nombre de lecteurs de trois revues A, B, C, on constate que, sur les personnes interrogées :

45 % lisent A — 45 % lisent B — 35 % lisent C

15 % lisent A et B — 10 % lisent B et C — 15 % lisent C et A

5 % lisent A, B et C.

On choisit au hasard une personne X parmi les personnes interrogées.
Déterminer les probabilités des événements suivants :

1° X ne lit aucune revue;

2° X lit exactement 2 revues;

3° X lit A mais ne lit pas C;

4° X lit A sachant qu'il lit déjà une autre revue;

5° X lit les trois revues, sachant qu'il en lit au moins une.

23-8 Dans un jeu de 32 cartes, on choisit au hasard 4 cartes (tirage sans remise).

Déterminer les probabilités des événements suivants :

1° l'une des cartes au moins est un as;

2° 3 cartes au plus sont des as;

3° les 4 cartes sont de même couleur;

4° il n'y a pas 2 cartes de même couleur;

5° les 4 cartes ont la même valeur;

6° il n'y a pas 2 cartes ayant la même valeur;

7° les 4 cartes ont des couleurs différentes et des valeurs différentes.

23-9 Dans une urne, il y a 10 boules portant les numéros de 1 à 10. On extrait au hasard deux boules de l'urne et l'on pose :

$X =$ le plus grand des nombres portés par les deux boules.

En envisageant successivement le cas des tirages avec ou sans remise, évaluer les probabilités des événements suivants :

1° $X \leqslant 6$, $X \leqslant 5$, puis $X = 6$;

2° $X \leqslant 6$ sachant que l'une des boules porte le numéro 1.

23-10 Dans un lac il y a N poissons. On en pêche 100 que l'on marque et rejette à l'eau. Quelques jours après, on pêche de nouveau 100 poissons. Soit a l'événement « sur les 100 poissons pêchés, 10 sont marqués ».

1° Calculer, en utilisant les formules des tirages sans remise, la probabilité $P_N(a)$, sachant qu'il y a N poissons dans le lac.

Calculer $$\frac{P_N(a)}{P_{N+1}(a)}$$

Comparer ce nombre à 1.

3° Déduire de ce qui précède que $P_N(a)$ passe par un maximum lorsque N croît de 100 à l'infini. Pour quelle valeur de N ce maximum est-il atteint ?

(Estimation du nombre de poissons dans le lac par la méthode du maximum de vraisemblance.)

23-11 Jean, Pierre et Paul sont des chasseurs d'adresse différente. Jean, le meilleur des trois, touche son gibier 7 fois sur 10, Pierre 5 fois et Paul, qui est myope et malchanceux, une fois seulement sur 10. Les trois chasseurs partent ensemble et tirent ensemble sur le même lapin.

Déterminer les probabilités des événements suivants :

1° le lapin est touché ;

2° le lapin est touché, mais Paul l'a raté ;

3° Paul est le seul à avoir touché le lapin ;

4° le lapin est touché, sachant que Paul l'a raté.

Nota : *on supposera que les résultats des trois chasseurs sont indépendants les uns des autres.*

23-12 On considère deux lots de pièces fabriquées. L'un L_1 renferme 1 % de pièces défectueuses, l'autre L_2 en renferme 5 %. On choisit l'un des deux lots (choix équiprobable). Dans le lot choisi, on procède au tirage d'une pièce.

1° Construire « l'arbre » donnant les diverses possibilités avec les probabilités correspondantes.

2° Utiliser cet « arbre » pour déterminer les probabilités des événements suivants :

a) la pièce est bonne,

b) le lot choisi est L_1, sachant que la pièce tirée est bonne.

23-13 On réceptionne un lot de pièces fabriquées. On procède pour cela au test statistique suivant : on prélève au hasard 10 pièces (tirage bernoullien).

Si les 10 pièces sont bonnes, le lot est accepté. S'il y a 2 pièces ou plus défectueuses, le lot est refusé.

Si le premier échantillon possède exactement une pièce défectueuse, on procède au tirage d'un second échantillon de même taille. Si les 10 pièces sont bonnes, le lot est accepté, sinon il est refusé.

1° Construire « l'arbre » donnant les diverses possibilités. En supposant la proportion des pièces défectueuses égale à p, marquer toutes les probabilités sur l'arbre.

2° Calculer, en fonction de p, les probabilités d'accepter ou de refuser le lot. Calculer à 1 millième près ces deux probabilités si :

$$p = 0{,}05 \qquad p = 0{,}10 \qquad p = 0{,}20.$$

23-14 Pour la préparation d'un examen, un candidat apprend un certain nombre de questions. L'examen se passe de la façon suivante : on pose 4 questions au candidat, celui-ci a le choix entre 4 réponses pour chacune des questions, une seule étant la bonne. Le candidat est reçu s'il donne au moins 3 réponses exactes, sinon il est ajourné.

1° Si le candidat connaît la réponse, la probabilité pour qu'il réponde exactement est 1, sinon cette probabilité est 0,25. En désignant par p la probabilité pour que, une question lui étant posée, le candidat connaisse la réponse, évaluer en fonction de p la probabilité pour que le candidat réponde exactement à une question posée.

2° Calculer, en fonction de p, la probabilité pour que le candidat réponde exactement à 4 questions ; à 3 questions. En déduire la probabilité pour que le candidat soit reçu.

3° Calculer à 0,01 près cette dernière probabilité si :

a) $p = 0$: c'est-à-dire le candidat ne sait rien,

b) $p = 0{,}5$: c'est-à-dire le candidat connaît la moitié du programme,

c) $p = 0{,}9$: c'est-à-dire le candidat a négligé une question sur 10.

Nota : on *supposera l'indépendance entre les réponses aux diverses questions*.

23-15 Dans un pays, les relevés météorologiques montrent que, s'il fait beau un jour, la probabilité pour qu'il fasse beau le lendemain est 0,8 et pour qu'il pleuve 0,2. Par contre, s'il pleut, il fait beau le lendemain avec une probabilité égale à 0,4, et il pleut avec une probabilité 0,6.

1° Construire les deux arbres donnant les diverses évolutions possibles du temps pendant 3 jours consécutifs à partir d'une journée de beau temps et à partir d'une journée de pluie.

2° Utiliser ces deux arbres pour déterminer les probabilités des événements suivants :

a : « il fera beau dimanche, sachant que l'on est jeudi et qu'il pleut »;

b : « il y aura au moins une journée de pluie avant mercredi, sachant que l'on est dimanche et qu'il fait beau ».

3° Un voyageur quitte le pays un mardi sous la pluie et revient le vendredi par beau temps. Quelles sont pour lui les probabilités des événements suivants :

a : « il a fait beau mercredi et jeudi »;

b : « il a plu mercredi ».



• **Bernoulli.**

Illustre famille de mathématiciens, astronomes et physiciens suisses, dont les plus célèbres sont : Jacques I (1654-1705) qui développa le *calcul différentiel et intégral* au-delà du niveau où l'avaient laissé Newton et Leibniz; mais ses travaux essentiels sont relatifs à la *théorie des probabilités.*

Jean I (1667-1748), frère de Jacques, qui contribua à répandre le *calcul différentiel et intégral* en Europe.

Daniel (1700-1782), fils de Jean, a été appelé le fondateur de la physique mathématique (théorie des cordes vibrantes, du mouvement des fluides, ...). En mathématiques, ses travaux portèrent sur le calcul des probabilités.

23-1 L'univers est le produit cartésien $E \times E$ avec $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Il est schématisé figure 5.

1° Les couples situés « au-dessus » du double trait, au nombre de 21, correspondent à l'événement considéré.

D'où la probabilité p de l'événement « somme des points strictement inférieure à 8 » :

$$p = \frac{21}{36} \text{ ou } \frac{12}{7} \text{ soit } p \approx 0{,}583.$$

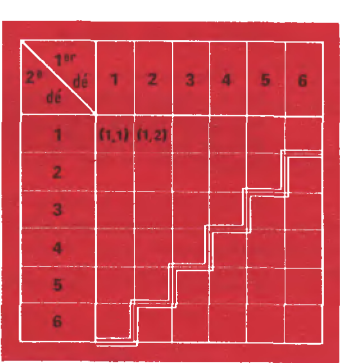


Fig. 5.

23-2 L'univers est $E \times E \times E$ avec $E = \{.....\}$.

1° (-1) racine $\Longleftrightarrow a - b + c = 0 \Longleftrightarrow b = a + c$.

2°, 3°, 4° Pour la comparaison *a priori*, chercher des implications logiques entre les divers événements.

23-3 Cf. § 2 et § 6.

23-4 1° Utiliser $P(a \cap b) \leqslant P(a) \leqslant P(a \cup b)$.

2° Le problème équivaut à trouver deux nombres, connaissant leur somme et leur produit.

23-5 1°, 2°, 3° Immédiat à l'aide du tableau.

Exemple : $P(\text{satisfait}) = \dfrac{50}{100} = 0{,}5.$

4° $$P_{Mec}(II) = \frac{P(II \cap \text{Méc.})}{P(\text{Méc.})} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{30}{100}} = \frac{1}{3}.$$

23-6 1° Puisque $P(a \cap b \cap c) = 0{,}1$ et $P(b \cap c) = 0{,}3$, la probabilité de l'événement « représenté par les hachures verticales » (fig. 6) est 0,2.

Cet événement est $\bar{a} \cap b \cap c$. Donc $P\left(\bar{a} \cap b \cap c\right) = 0{,}2$.

On obtient de même $P(a \cap \bar{b} \cap c)$ et $P(a \cap b \cap \bar{c})$ (hachures horizontales et hachures obliques).

On calcule ensuite $P(a \cap \bar{b} \cap \bar{c})$ (zone « pointillée »).

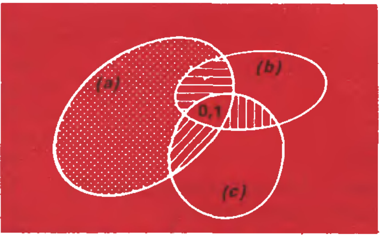


Fig. 6.

On pourra remarquer que $(a \cup b \cup c) \cap (a \cap b \cap c) = a \cap b \cap c$.

23-7 Même méthode qu'à l'exercice 23-6.

23-8 Pour déterminer la probabilité de choisir 4 cartes de valeurs différentes, on pourra procéder de la façon suivante :

— La première carte étant tirée, pour que la seconde soit de valeur différente, il faut la choisir parmi 28 :

$$\text{probabilité} : \frac{28}{31},$$

— Les deux premières cartes étant alors tirées et de valeurs différentes, pour qu'il en soit encore de même avec la troisième, il faut la choisir parmi 24.

Finalement, d'après le principe des probabilités conditionnelles, on obtient :

$$\text{probabilité d'avoir 4 cartes de valeurs différentes} : \frac{28}{31} \cdot \frac{24}{30} \cdot \frac{20}{29}$$

On procédera de la même façon pour déterminer la probabilité d'avoir 4 cartes de couleurs différentes.

23-9 1° On a : $(X \leqslant 6) \iff (X = 6 \text{ ou } X \leqslant 5)$

d'où : $$\Pr(X = 6) = \Pr(X \leqslant 6) - \Pr(X \leqslant 5).$$

23-12 Se reporter au second exemple du § 9.

23-13 2° On trouvera, pour la probabilité d'accepter le lot :

$$(1 - p)^{10} \left[1 + 10p(1 - p)^9\right]$$

23-14 Si q est la probabilité pour que le candidat réponde exactement à une question posée, la probabilité pour qu'il réponde exactement à 3 questions sur 4 est :

$$C_4^3 \, q^3(1 - q)$$

A

B

C

D

E

TABLE DES MATIÈRES

I NOTIONS GÉNÉRALES

5. FONCTIONS

6. LOIS DE COMPOSITION INTERNE

7. STRUCTURES : GROUPES, ANNEAUX, CORPS

8. STRUCTURES D'ORDRE

9. NOMBRES CARDINAUX

10. DIAGRAMMES SÉQUENTIELS

11. ANALYSE COMBINATOIRE

12. LE CORPS DES NOMBRES COMPLEXES

DÉRIVÉES DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

13. GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS NUMÉRIQUES

14. DÉRIVABILITÉ DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

FONCTIONS LOGARITHMES
FONCTIONS EXPONENTIELLES

20. FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

21. FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE e

PROBABILITÉS

22. L'ALGÈBRE DES ÉVÉNEMENTS

23. AXIOMES DES PROBABILITÉS

ACHEVÉ D'IMPRIMER
SUR LES PRESSES DE
L'IMPRIMERIE
CHAIX-DESFOSSÉS
NÉOGRAVURE
A PARIS
en Janvier MCMLXIX

Dépôt légal imprimeur
n° 383

Dépôt légal éditeur
1er trimestre 1969 n° 3656

